

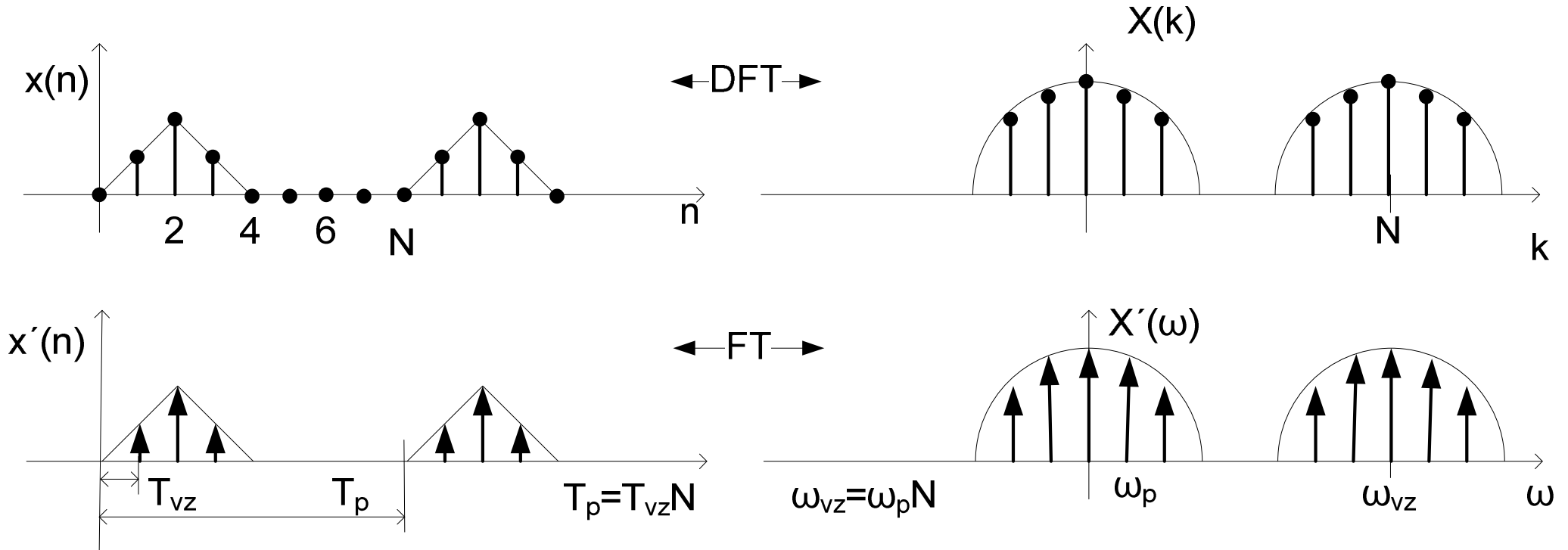
Dostali sme vzorce na výpočet Diskrétnej Fourierovej transformácie (DFT) a inverznej DFT:

$$DFT : \quad X(k) = \sum_n x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} = \sum_n x(n) W_N^{-kn}$$

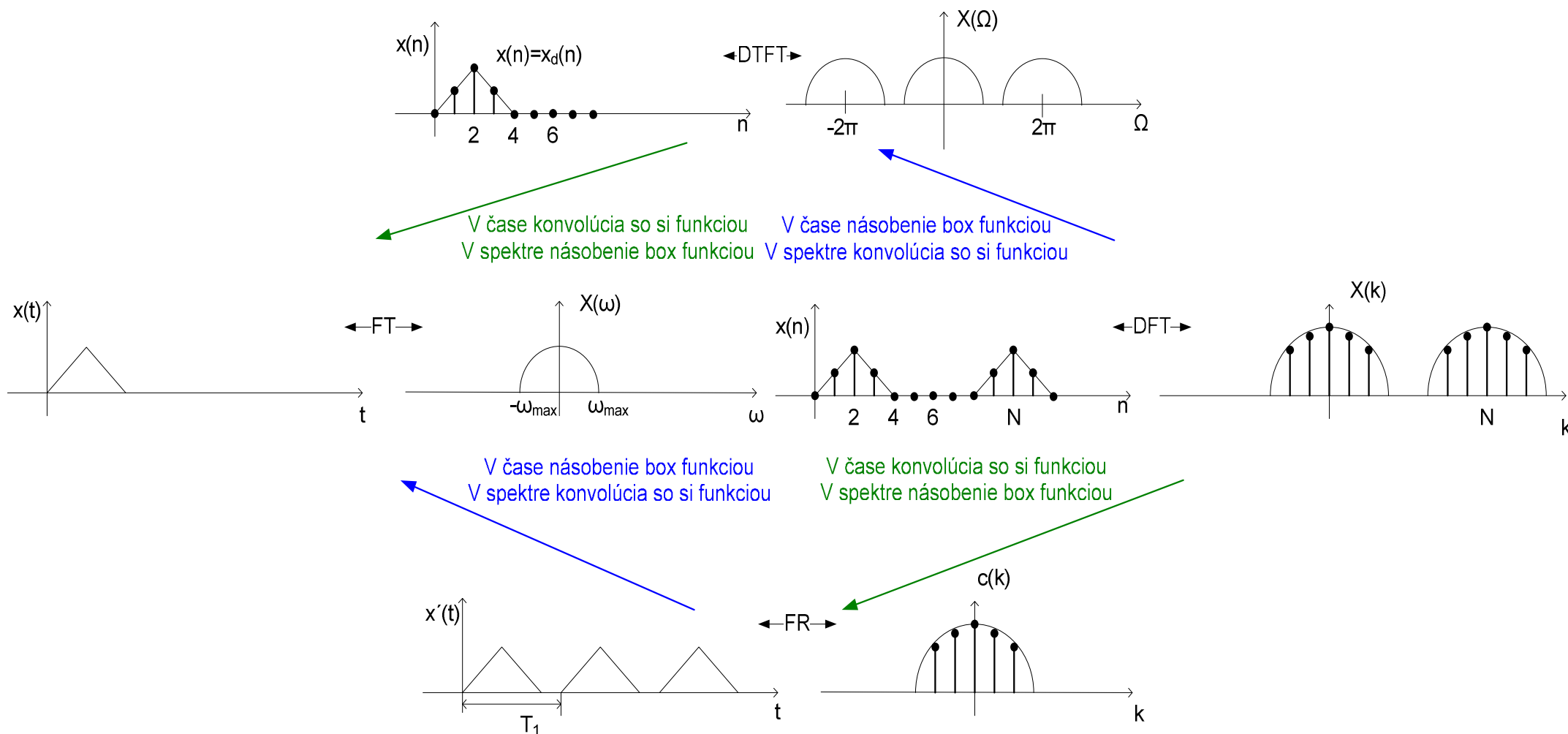
$$DFT^{-1} : \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_k X(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = \frac{1}{N} \sum_k X(k) W_N^{kn} \quad \text{kde} \quad W_N = e^{j \frac{2\pi}{N}}$$

Teda transformujeme signál s periódou N vzoriek na spektrum s periódou N.

Keď vieme aká bola vzorkovacia frekvencia, vieme nakresliť obraz toho, čo sa deje aj v „spojitom čase“ a „spojitej frekvencii“:



Rekonštrukcia „pôvodného“ spojitého neperiodického signálu z periodicky sa opakujúcich sa vzoriek.



- Musíme si byť vedomí prítomnosti istého aliasingu (ak sme vhodne vzorkovali tak zanedbateľnému) v čase aj frekvencii.

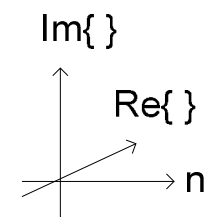
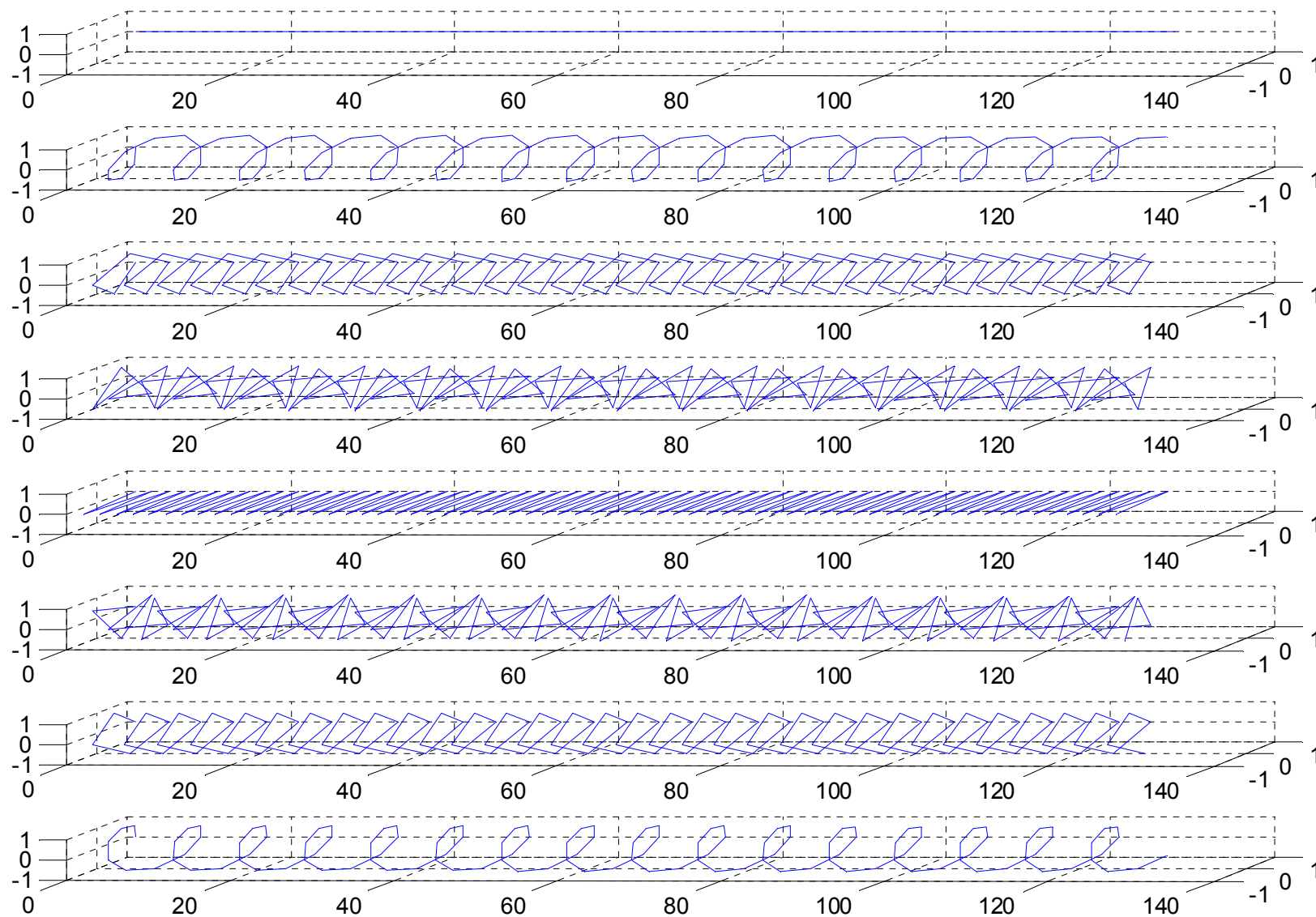
Zápis DFT v maticovom tvare

Druh	Povodný zápis	Maticový zápis
DFT	$X(k) = \sum_n x(n) W_N^{-kn}$	$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X(0) \\ \dots \\ X(N-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_N^{-00} & \dots & W_N^{-0(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ W_N^{-(N-1)0} & \dots & W_N^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ \dots \\ x(N-1) \end{pmatrix} = \mathbf{DFT}_N \mathbf{x}$
DFT^{-1}	$x(n) = \frac{1}{N} \sum_k X(k) W_N^{kn}$	$\mathbf{x} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} W_N^{00} & \dots & W_N^{0(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ W_N^{(N-1)0} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(0) \\ \dots \\ X(N-1) \end{pmatrix} = \mathbf{DFT}_N^{-1} \mathbf{X}$

Poznámka:

- platí: $\mathbf{x} = \mathbf{DFT}_N^{-1} \mathbf{X} = \mathbf{DFT}_N^{-1} (\mathbf{DFT}_N \mathbf{x}) = (\mathbf{DFT}_N^{-1} \mathbf{DFT}_N) \mathbf{x} = \mathbf{I}_N \mathbf{x} = \mathbf{x}$
- $\mathbf{DFT}_N^{-1} = \frac{1}{N} \text{transponovaná(konjugovaná}(\mathbf{DFT}_N))$

Ako vyzerajú funkcie v riadkoch $\mathbf{DFT}_N$, Nech $N=128$. Zobrazujeme pre $k=0, 16, 32, 64, 80, 96$. Ako vyzerajú stĺpce? Tak isto. Matica je **symetrická**.



Čo pozorujeme keď sa pozrieme na tuto sadu funkcií?

- Najväčšie frekvencie sú pri $N/2$, potom frekvencia klesá (pričom špirála sa otáča naopak)
- Všetky tieto funkcie sú na seba navzájom ortogonálne (ich skalárny súčin je 0).
- Pri riadkoch a stĺpcoch matice $\mathbf{DFT}^{-1}_N$ by sme pozorovali to isté, len špirály by sa točili opačným smerom

Druh	Maticový zápis	Interpretácia
DFT	$\mathbf{X} = \mathbf{DFT}_N \mathbf{x}$ 	$X(k) = \langle DFT_{N, \text{riadok } k}(n), x(n) \rangle$ ako sa „podobá“ signál na jednotlivé riadky matice?
DFT^{-1}	$\mathbf{x} = \mathbf{DFT}^{-1}_N \mathbf{X}$ 	$x(n) = \sum_k X(k) DFT_{N, \text{stĺpec } k}^{-1}(n)$ ako sa dá signál poskladať z váhovaných stĺpcov matice?

Príklad 1:

Nech $x(n)=(1,1,0,0,0,0,0,0)$ a je periodické s periódou $N=8$. Čomu sa rovná spektrum?

Porovnajme toto spektrum so signálom so spektrom neperiodického signálu $x_{np}(n) = (\overset{\bullet}{1}, 1)$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} W_8^{-nk} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ \dots \\ x(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j\pi/4} & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j2\pi/4} & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j3\pi/4} & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j4\pi/4} & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j5\pi/4} & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j6\pi/4} & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j7\pi/4} & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + e^{-j\pi/4} \\ 1 - j \\ 1 + e^{-j3\pi/4} \\ 0 \\ 1 + e^{+j3\pi/4} \\ 1 + j \\ 1 + e^{+j\pi/4} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-j\pi/8} \cos(\pi / 8) \\ e^{-j2\pi/8} \cos(2\pi / 8) \\ e^{-j3\pi/8} \cos(3\pi / 8) \\ e^{-j4\pi/8} \cos(4\pi / 8) \\ e^{-j5\pi/8} \cos(5\pi / 8) \\ e^{-j6\pi/8} \cos(6\pi / 8) \\ e^{-j7\pi/8} \cos(7\pi / 8) \end{pmatrix}$$

Využili sme $1 + e^{j\phi} = e^{j\phi/2} (e^{-j\phi/2} + e^{j\phi/2})$

$$X_{np}(\Omega) = 2e^{-j\Omega/2} \cos(\Omega / 2)$$

Vidíme, že $X(k)$ sú vzorkami z $X_{np}(\Omega)$ v bodoch $\Omega = 2\pi k / N$.

Príklad 2:

Majme spektrum $X(k)=8(0,j,0,0,0,0,0,-j)$ a je periodické s periódou $N=8$. Akému signálu Odpovedá?

$$\mathbf{x} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} W_8^{nk} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(0) \\ \dots \\ X(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{j\pi/4} & \dots & e^{-j\pi/4} \\ 1 & e^{j2\pi/4} & \dots & e^{-j2\pi/4} \\ 1 & e^{j3\pi/4} & \dots & e^{-j3\pi/4} \\ 1 & e^{j4\pi/4} & \dots & e^{-j4\pi/4} \\ 1 & e^{j5\pi/4} & \dots & e^{-j5\pi/4} \\ 1 & e^{j6\pi/4} & \dots & e^{-j6\pi/4} \\ 1 & e^{j7\pi/4} & \dots & e^{-j7\pi/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{j2\pi/4} + e^{-j2\pi/4} \\ e^{j3\pi/4} + e^{-j3\pi/4} \\ e^{j4\pi/4} + e^{-j4\pi/4} \\ e^{j5\pi/4} + e^{-j5\pi/4} \\ e^{j6\pi/4} + e^{-j6\pi/4} \\ e^{j7\pi/4} + e^{-j7\pi/4} \\ e^{j8\pi/4} + e^{-j8\pi/4} \\ e^{j9\pi/4} + e^{-j9\pi/4} \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\pi / 4) \\ \sin(2\pi / 4) \\ \sin(3\pi / 4) \\ \sin(4\pi / 4) \\ \sin(5\pi / 4) \\ \sin(6\pi / 4) \\ \sin(7\pi / 4) \end{pmatrix}$$

Využili sme $e^{j\phi} + e^{-j\phi} = 2 \cos(\phi)$, $\sin(\phi + \pi / 2) = \cos(\phi)$, $\sin(\phi + \pi) = -\sin(\phi)$

Rýchlejší algoritmus výpočtu DFT? Áno existuje.

- Ako na to? Využijeme symetrie a identity medzi jednotlivými W_N^{nk}
- Postupy
 - Decimácia v Čase
 - Decimácia vo frekvencii

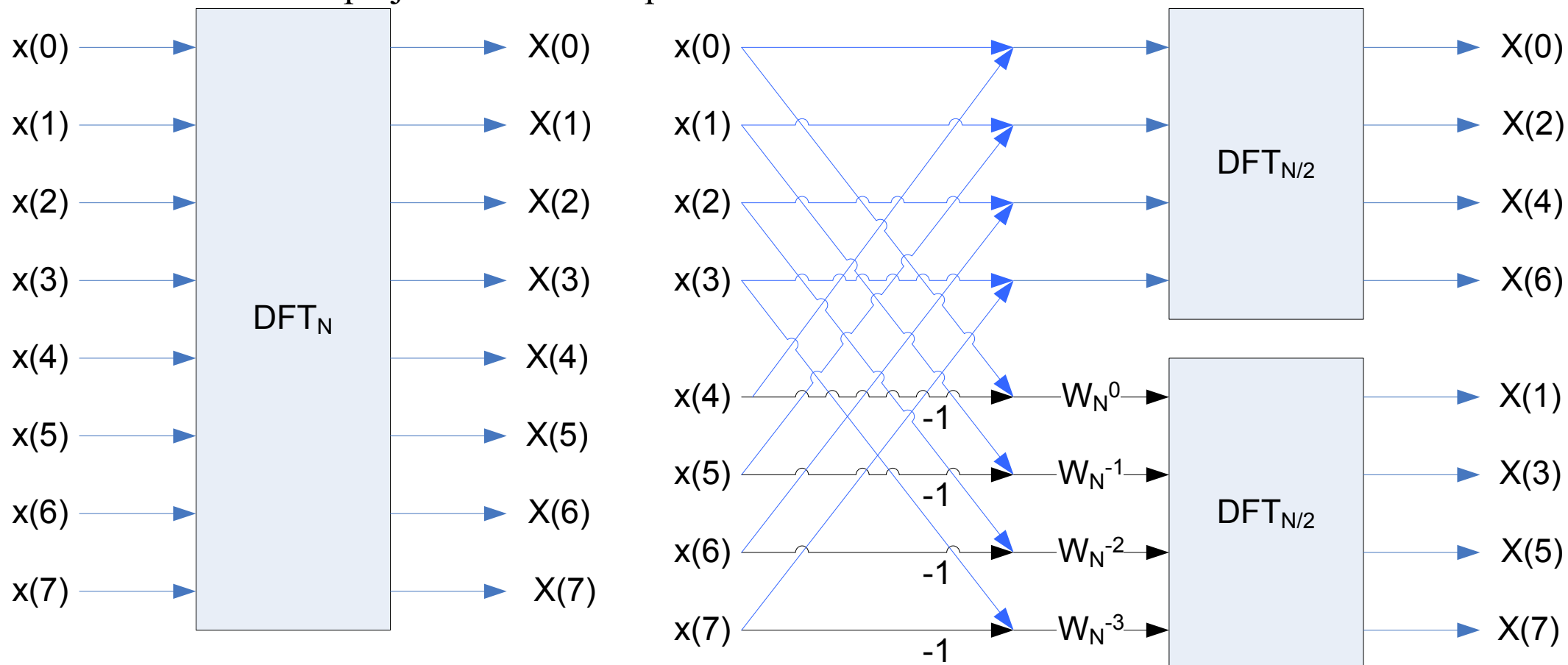
Decimácia vo frekvencii

$$X(k) = \sum_n x(n) W_N^{-kn}$$

Výjadriť si párne a nepárne **frekvenčné** vzorky.

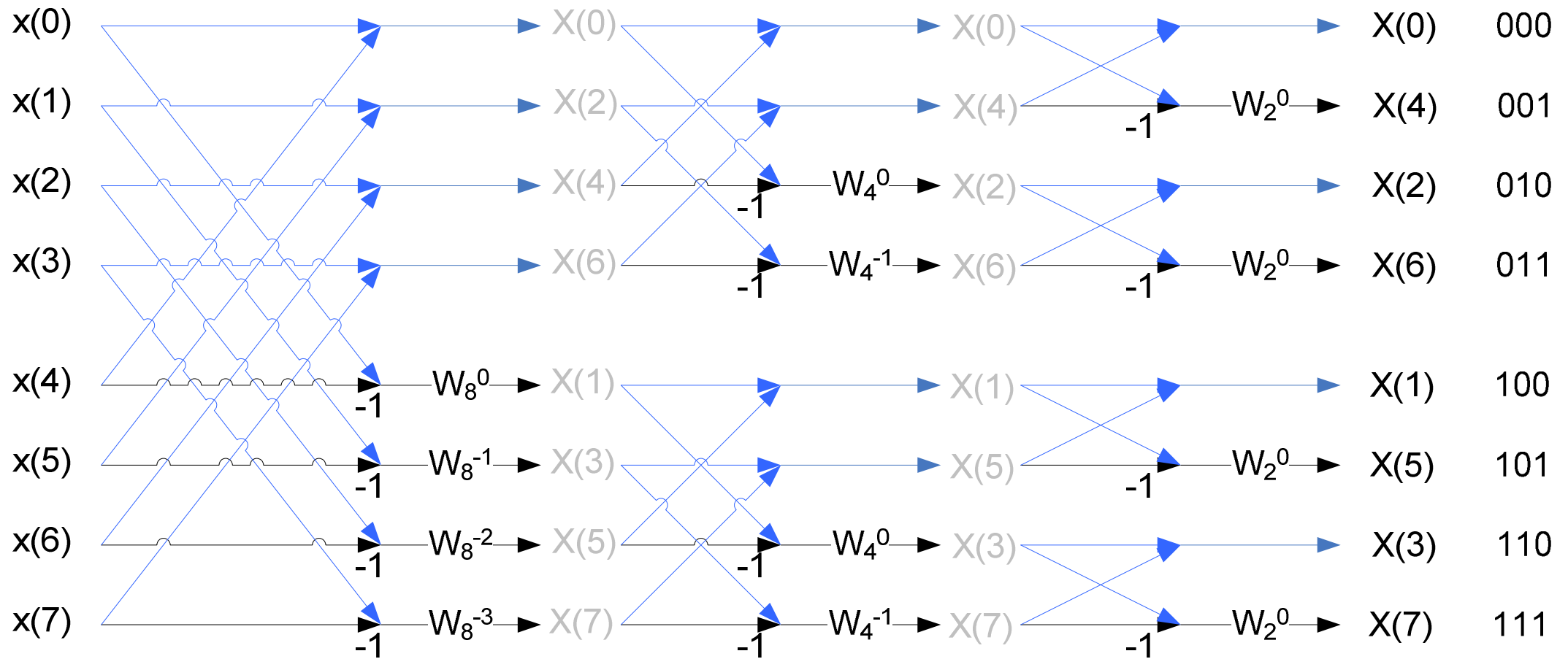
Párne	Nepárne
$X(2r) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-2rn} =$ $= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{-2rn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n + N/2) W_N^{-2r(n+N/2)}$ Platí: $W_N^{-2r(n+N/2)} = W_N^{-2rn} W_N^{-rN} = W_N^{-2rn}$ Potom: $X(2r) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + x(n + N/2)] W_N^{-2rn}$ Keďže platí $W_N^{-2rn} = W_{N/2}^{-rn}$ Dostaneme výsledok: $X(2r) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + x(n + N/2)] W_{N/2}^{-rn}$ $X(2r) = DFT_{N/2} [x(n) + x(n + N/2)]$	$X(2r+1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-(2r+1)n} =$ $= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{-(2r+1)n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n + N/2) W_N^{-(2r+1)(n+N/2)}$ Platí: $W_N^{-(2r+1)(n+N/2)} = W_N^{-(2r+1)n} W_N^{-rN} W_N^{-N/2} = W_N^{-(2r-1)n} (-1)$ Potom: $X(2r+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) - x(n + N/2)] W_N^{-(2r+1)n}$ Keďže platí $W_N^{-(2r+1)n} = W_{N/2}^{-rn} W_N^n$ Dostaneme výsledok: $X(2r+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) - x(n + N/2)] W_N^n W_{N/2}^{-rn}$ $X(2r+1) = DFT_{N/2} [(x(n) - x(n + N/2)) W_N^n]$

Ako sa zmení situácia po jednorazovom aplikovaní decimácie vo frekvencii:



Decimáciu vo frekvencii môžeme opakovať pre polovičné jadrá ďalej a ďalej ...

Rýchly algoritmus výpočtu DFT založený na Decimácii vo frekvencii (príklad pri N=8)



Decimácia v čase

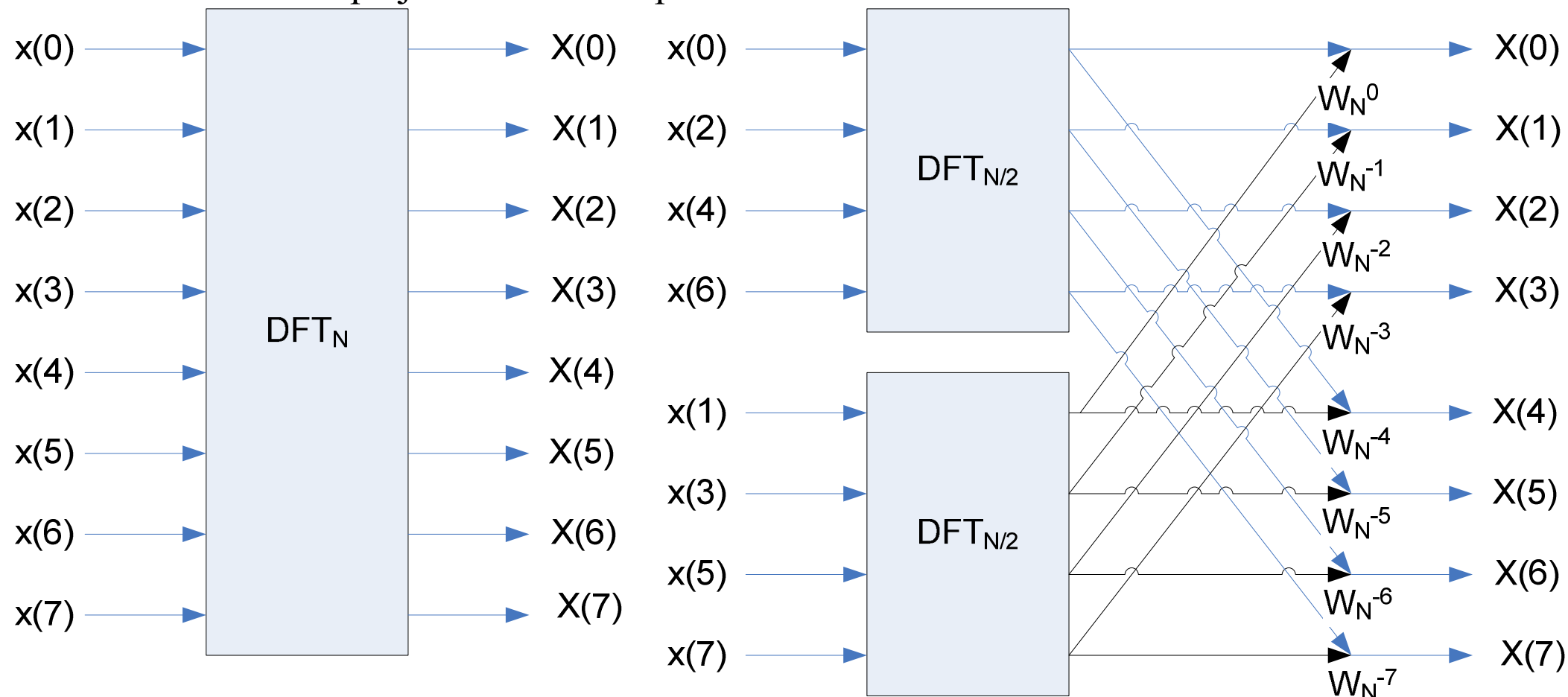
$$X(k) = \sum_n x(n) W_N^{-nk}$$

Oddelíme párne a nepárne **časové** vzorky.

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{-nk} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) W_N^{-2rk} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) W_N^{-(2r+1)k} = \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r) W_{N/2}^{-rk} + W_N^{-k} \sum_{r=0}^{N/2-1} x(2r+1) W_{N/2}^{-rk} = DFT_{N/2} [x(2r)] + W_N^{-k} DFT_{N/2} [x(2r+1)] \end{aligned}$$

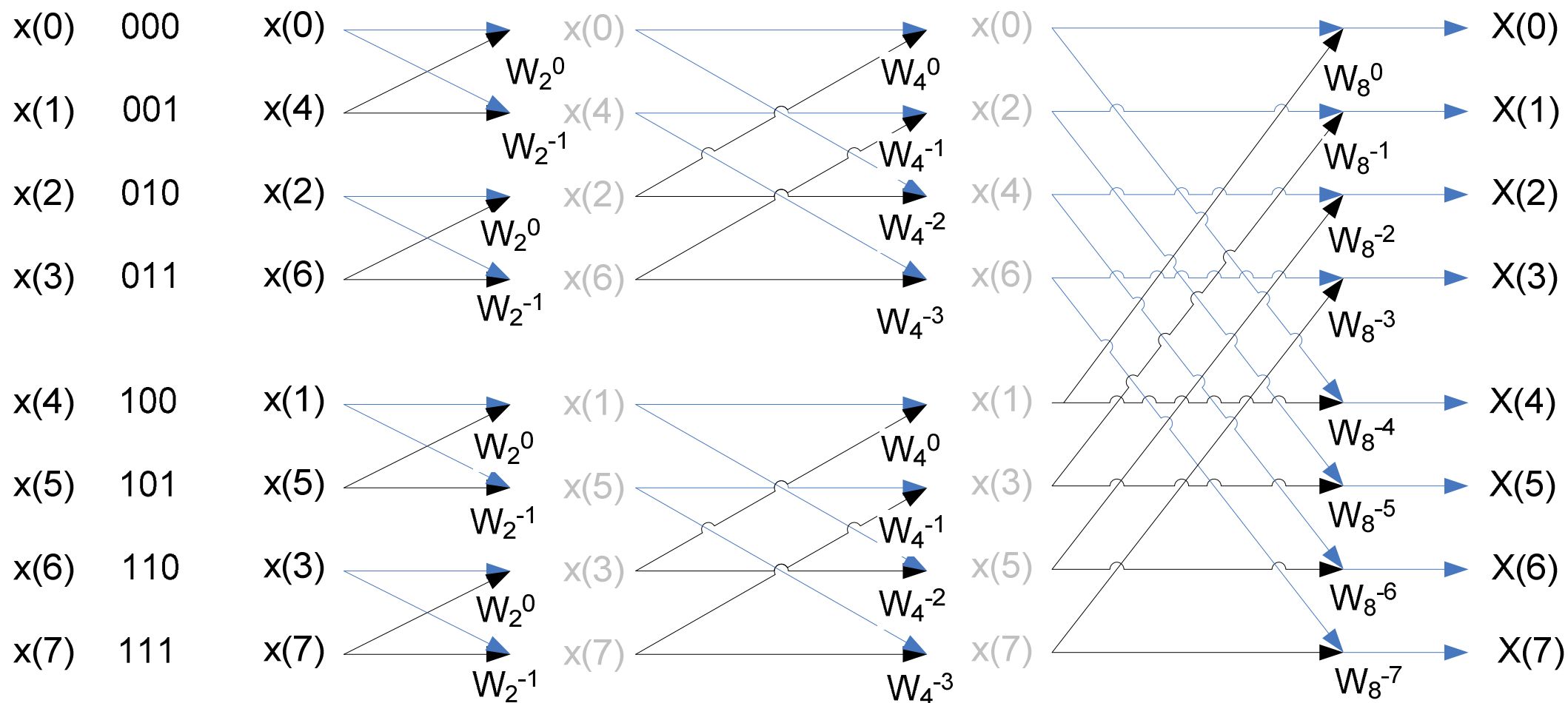
Pozor: $DFT_{N/2}$ rovnako prispieva ku $X(k)$ pre $k=0, 1, \dots, N/2-1$ ako aj pre $X(k)$ $k=N/2-1, \dots, N-1$

Ako sa zmení situácia po jednorazovom aplikovaní decimácie v čase:



Decimáciu vo frekvencii môžeme opakovať pre polovičné jadrá ďalej a ďalej ...

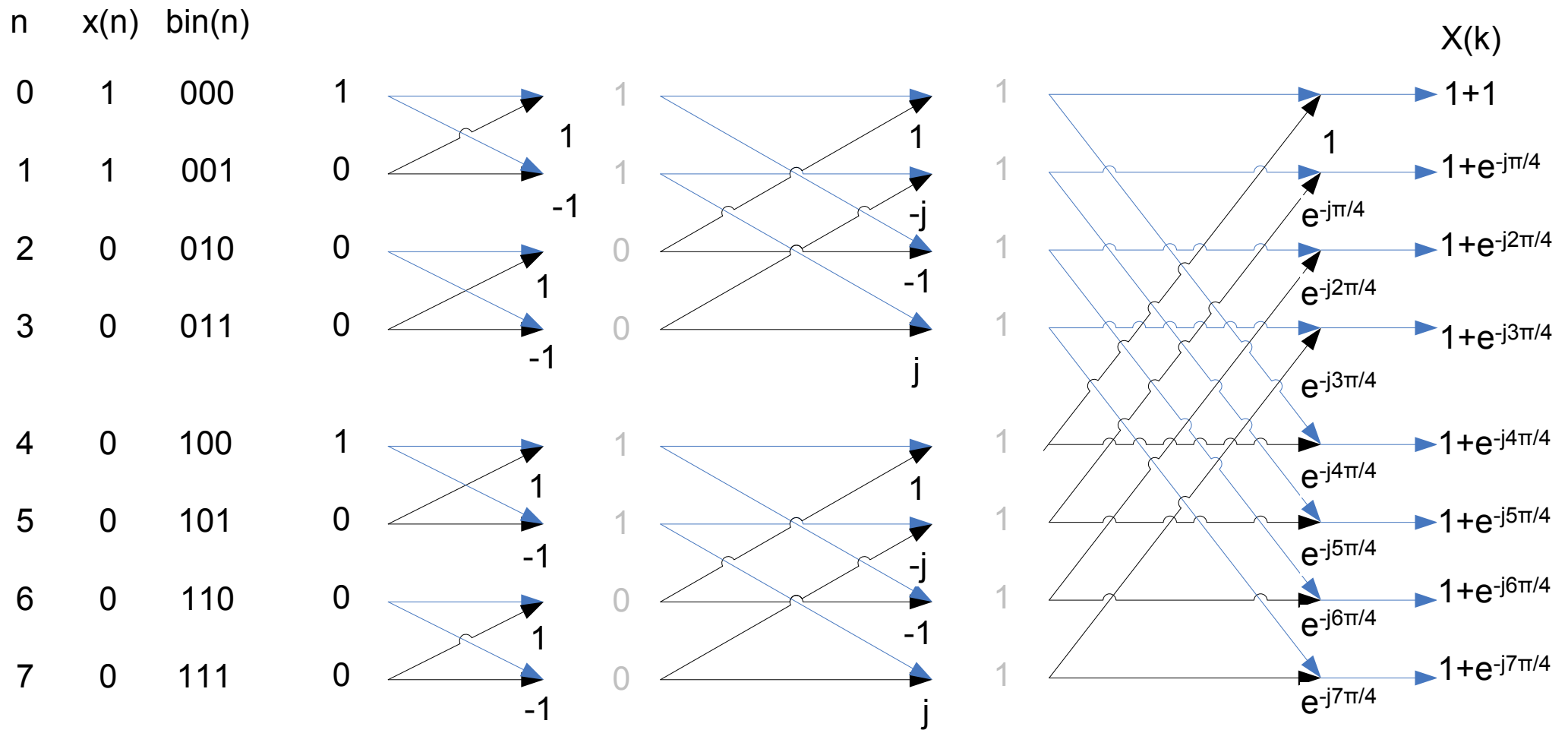
Rýchly algoritmus výpočtu DFT založený na Decimácii v Čase (příklad při N=8)



Príklad:

Nech $x(n)=(1,1,0,0,0,0,0,0)$ a je periodické s periódou $N=8$. Čomu sa rovná spektrum?

Pri výpočte použite decimáciu v Čase.



Na inverznú DFT chceme použiť ten istý algoritmus.

- Prečo je to také dôležité?
- Ako na to?

$$DFT(x(n)) \quad X(k) = \sum_n x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_n x(n) W_N^{-kn}$$

$$DFT^{-1}(X(k)) : \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_k X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_k X(k) W_N^{kn}$$

kde $W_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$

Vidíme, že:

$$DFT(\overline{x(n)}) = \sum_n \overline{x(n) W_N^{kn}} = N \overline{DFT^{-1}(x(n))}$$

Teda výsledkom je:

$$DFT^{-1}(x(n)) = \frac{1}{N} \overline{DFT(\overline{x(n)})} \quad \text{resp.} \quad DFT^{-1}(X(k)) = \frac{1}{N} \overline{DFT(\overline{X(k)})}$$

Ak náš $x(n)$ bol reálny, potom konjugácia spektra $\overline{X(k)}$ odpovedá „preusporiadaniu spektra“, kde prvky $X(0)$ a $X(N/2)$ necháme na svojich miestach a ostatné „pretočíme“ okolo bodu $X(N/2)$. Výsledkom je teda postup:

- 1) Preusporiadame spektrum
- 2) Vypočítame DFT
- 3) Výsledok podelíme N

Príklad 2:

Majme spektrum $X(k)=8(0,0,j,0,0,0,-j,0)$ periodické s periódou $N=8$. Akému signálu odpovedá?

