

# Ideálne vzorkovanie v čase – čo sa presne deje vo frekvencii?

Majme  $x(t)$  - reálny spojitý neperiodický signál so spektrom  $X(\omega)$ .

Z neho vytvoríme signál  $x'(t)$  tak, že  $x(t)$  prenásobíme sekvenciou Dirakových impulzov:

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) \sum_n \delta(t - nT_{vz}) = \sum_n x(t) \delta(t - nT_{vz}) = \sum_n x(nT_{vz}) \delta(t - nT_{vz}) = \\ &= \sum_n x_d(n) \delta(t - nT_{vz}) \end{aligned}$$

Mohutnosti tohto signálu tvorí diskretný signál  $x_d(n) = x(nT_{vz})$

$$\begin{aligned} X'(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x'(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n x_d(n) \delta(t - nT_{vz}) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \sum_n x_d(n) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_{vz}) e^{-j\omega t} dt = \sum_n x_d(n) e^{-j\omega nT_{vz}} = \sum_n x_d(n) e^{-j\omega n 2\pi / \omega_{vz}} \end{aligned}$$

K čomu sme sa dopracovali?

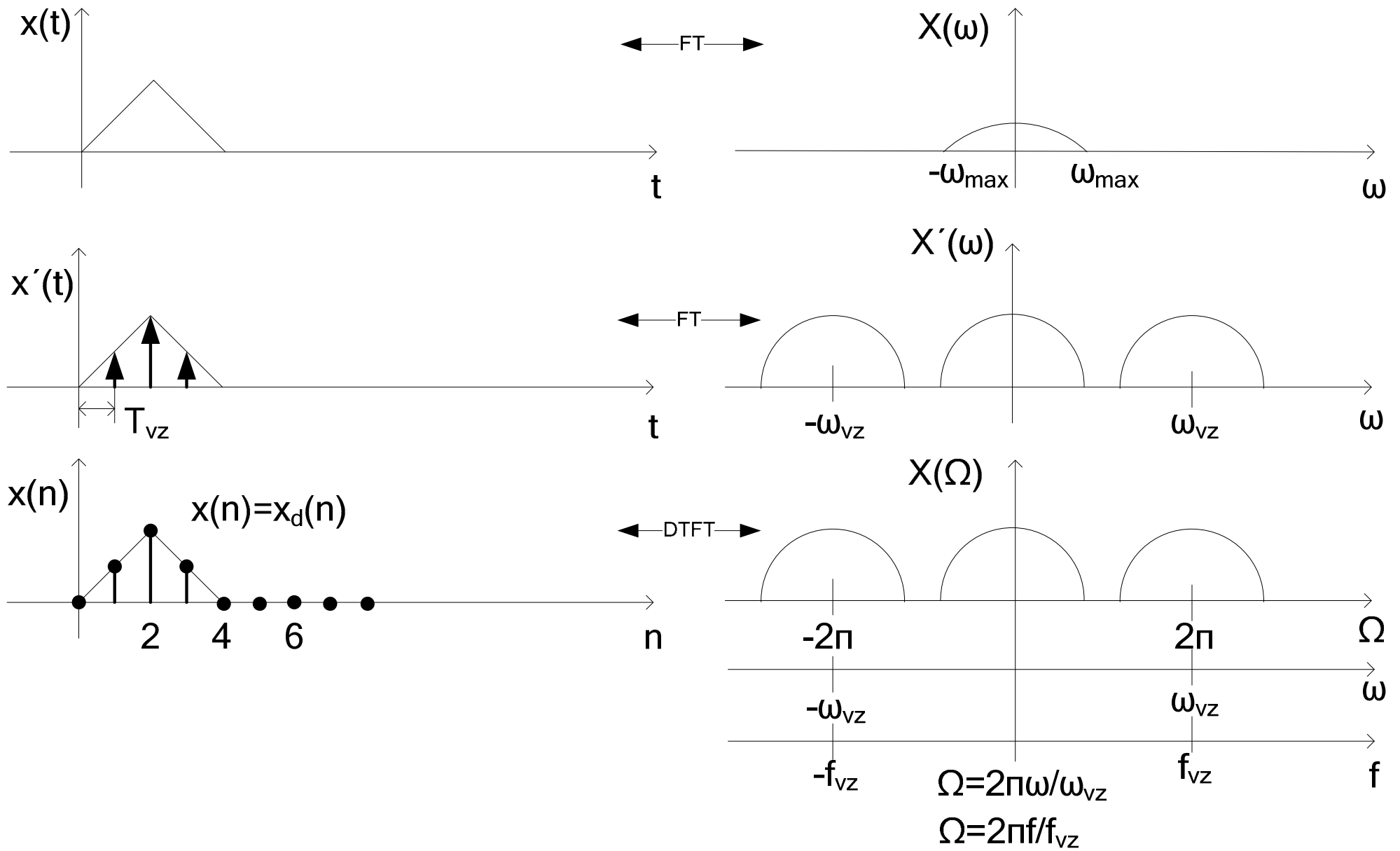
- Spektrum  $X'(\omega)$  signálu  $x'(t)$  je periodická funkcia s periódou  $2\pi / T_{vz} = 2\pi f_{vz} = \omega_{vz}$ .
- Zjednodušíme zápis substitúciou  $\Omega = 2\pi\omega / \omega_{vz}$

Následne

$$X'(\omega) = \sum_n x_d(n) e^{-j\omega n 2\pi / \omega_{vz}} \Rightarrow X'(\Omega) = \sum_n x_d(n) e^{-j\Omega n}$$

- Spektrum  $X'(\Omega)$  signálu  $x'(t)$  je periodická funkcia s periódou  $2\pi$
- Spektrum rátame pomocou vzoriek  $x_d(n) = x(nT_{vz})$ , t.j. vlastne z týchto vzoriek.
- T.j. ak nám niekto zadá diskretný signál  $x_d(n)$  vieme vyrátať jeho „spektrum“, ale vlastne rátame spektrum signálu  $x'(t)$ .
- Tento druh Fourierovej transformácie budeme nazývať DTFT (Discrete Time Fourier Transform)

| Názov | Časová oblasť                   | Frekvenčná oblasť                                                                    | Poznámka                                                                                                          |
|-------|---------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|       | $x(n)$ , diskretné neperiodické | $X(\Omega)$ , spojité periodické<br>s periódou ,<br>Označované aj ako $DTFT\{x(n)\}$ | $X(\Omega) = \sum_n x(n) e^{-j\Omega n}$<br>$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$ |



## Príklad

Majme diskrétny neperiodický signál  $x(n) = \delta(n)$

Aké spektrum  $X(\Omega) = |X(\Omega)|e^{j\phi(\Omega)} = M(\Omega)e^{j\phi(\Omega)}$  má signál  $x(n)$ ?

- Odhadnite spektrum (sprievodiče)
- Vypočítajte tvar spektra  $X(\Omega) = |X(\Omega)|e^{j\phi(\Omega)} = M(\Omega)e^{j\phi(\Omega)}$

## DTFT v Matlabe !!!

- To čo sme vyrátali na tabuli si môžeme vizualizovať v Matlabe

## Demo vlasnost' – ukážka odvodenia vlastnosti

- Nech  $x(n)$  obsahuje nízke frekvencie. Signál  $y(n)$  s vysokými frekvenciami vyrobíme zo signálu  $x(n)$  nasledovne:  $y(n) = (-1)^n x(n)$  (každý druhý koeficient prenásobíme -1)

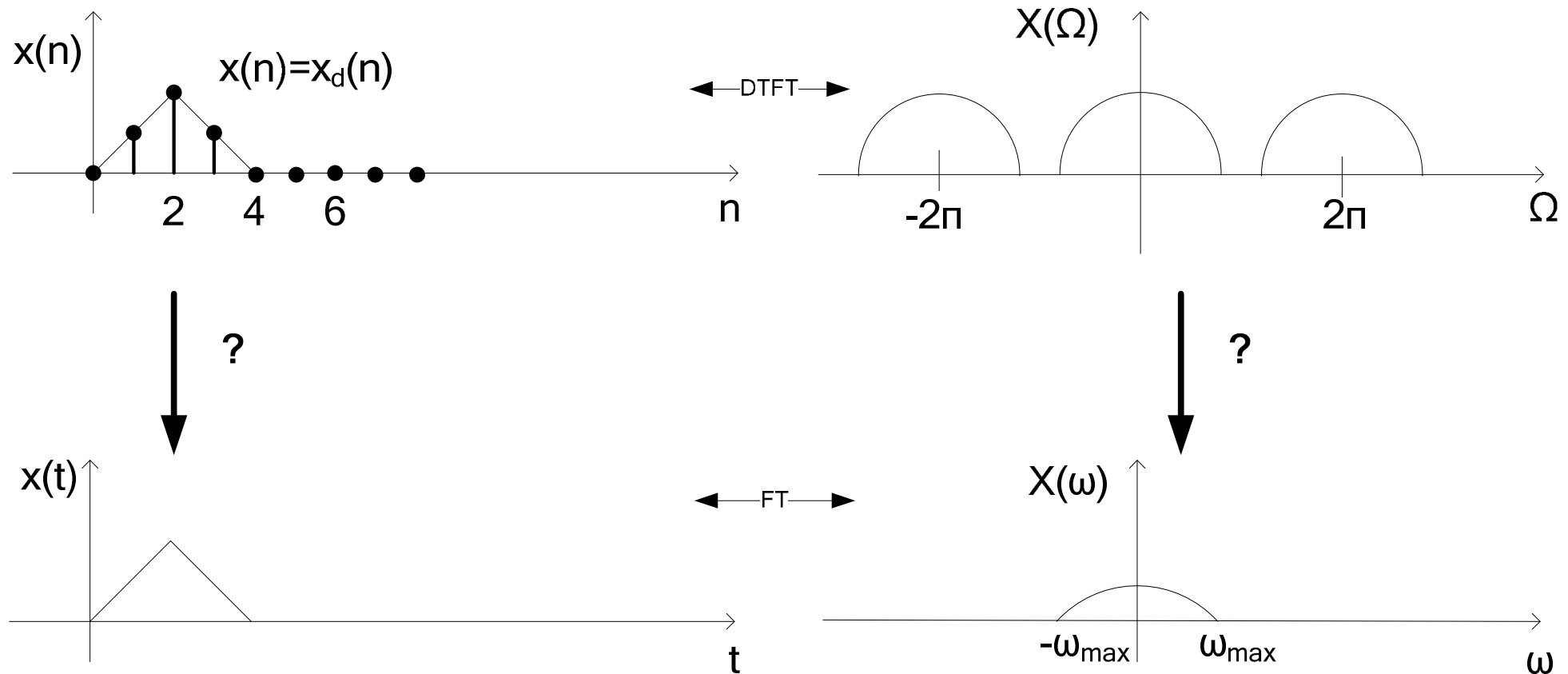
$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \sum_n y(n) e^{-j\Omega n} = \sum_n x(n) (-1)^n e^{-j\Omega n} = \sum_n x(n) (-1)^n e^{-j\Omega n} = \sum_n x(n) e^{\pm j\pi n} e^{-j\Omega n} = \\ &= \sum_n x(n) e^{-j(\Omega \pm \pi)n} = X(\Omega \pm \pi) \end{aligned}$$

## Ostatné vlastnosti DTFT

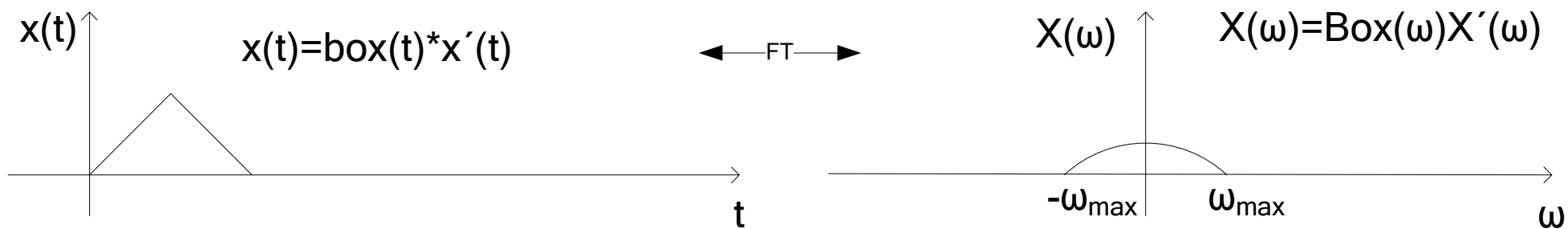
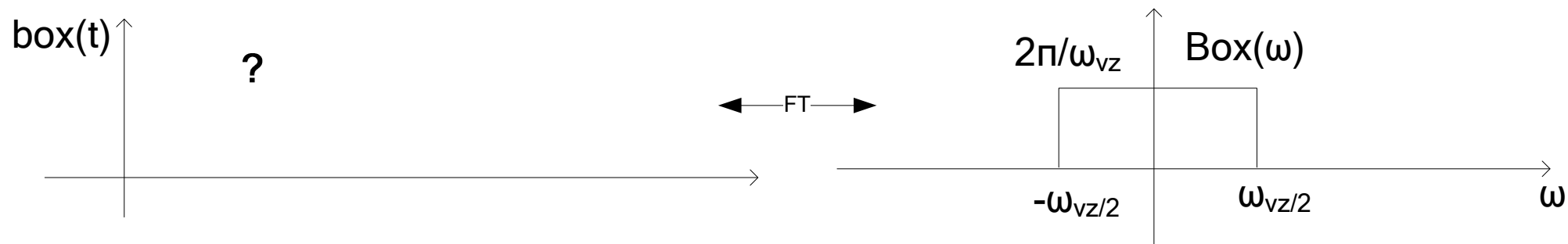
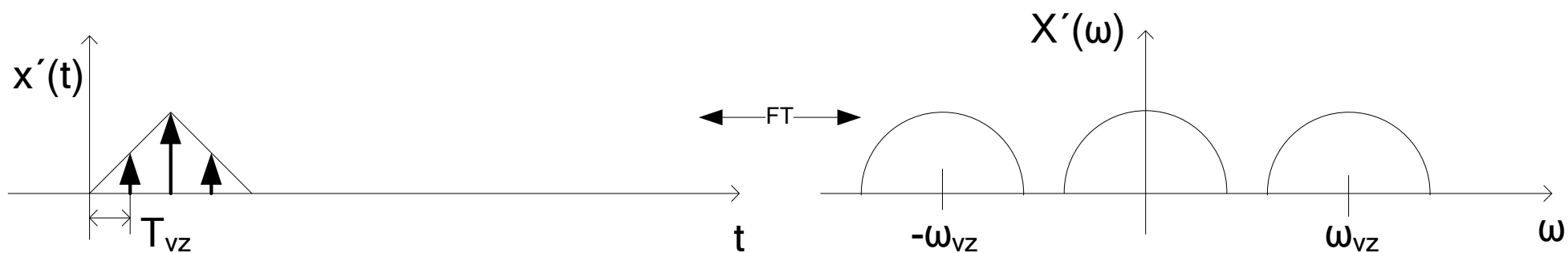
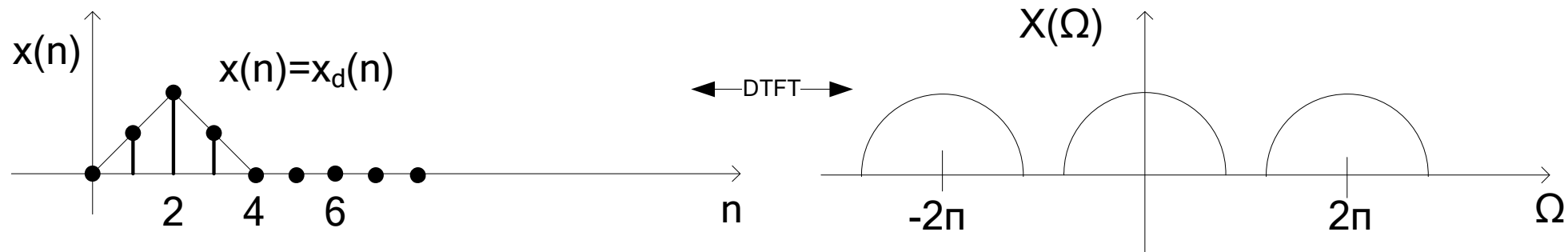
- Podobne ako to bolo v prípade FR a FT vieme vyplniť celú tabuľku
- Dokazuje sa ľahšie, nemusíme rátať integrály ...

# Čo ak spojitý signál chceme zrekonštruovať z jeho časových vzoriek?

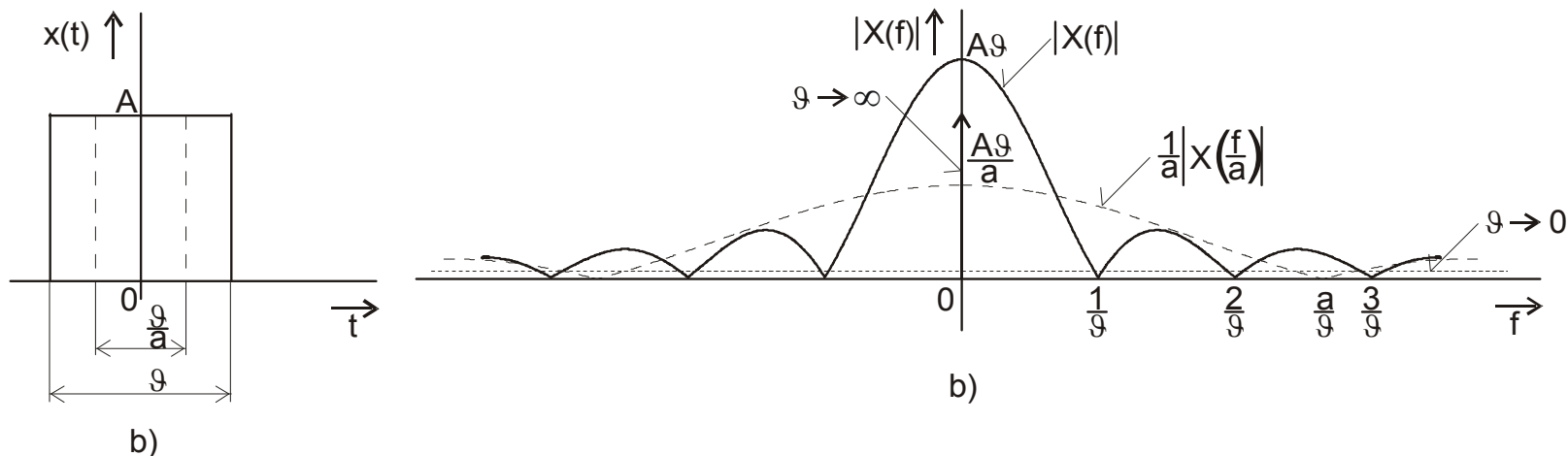
- Úplná rekonštrukcia je možná iba ak bol pri vzorkovaní dodržaný Shannon-Kotelnikov teorém t.j. spektrá pri periodifikácii sa nám **nezliali** a nenastal **aliasing**.
- Ako na rekonštrukciu?



- Riešenie: v Spektre stačí „vymazať“ poposúvané obrazy pôvodného spektra, ktoré vznikli pri periodifikácii.
- Ako „mazať“? Použijeme „oblíbený trik“ s násobením v spektre a konvolúciou v čase.



- Čomu sa rovná  $\text{box}(t)$ ?
- Spomeňme si na



$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{-j\omega} \left[ e^{-j\omega t} \right]_{-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} = \frac{A}{-j\omega} \left( -2j \sin \omega \frac{g}{2} \right) = A g \frac{\sin \omega \frac{g}{2}}{\omega \frac{g}{2}} = A g \text{si} \pi f g$$

- A využime dualitu:

| Názov   | Časová oblasť | Frekvenčná oblasť | Poznámka |
|---------|---------------|-------------------|----------|
| Dualita | $X(t)$        | $2\pi x(-\omega)$ |          |

- V našom prípade  $A = 2\pi / \omega_{vz}$  (vid' súvis spektra FT a DTFT) a  $g = \omega_{vz}$
- T.j.  $\text{box}(t) = \frac{1}{2\pi} A \text{si}(t\omega_{vz} / 2) = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{\omega_{vz}} \omega_{vz} \text{si}(t\omega_{vz} / 2) = \text{si}(t \frac{\pi}{T_{vz}})$
- Táto funkcia ma nulovú hodnotu v bodoch  $t = nT_{vz}$



- Signál  $x(t)$  teda môžeme vyjadriť ako

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \text{box}(t) * x'(t) = \text{box}(t) * \sum_n x_d(n) \delta(t - nT_{vz}) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{box}(\tau) \sum_n x_d(n) \delta(t - \tau - nT_{vz}) d\tau = \\
 &= \sum_n x_d(n) \int_{-\infty}^{\infty} \text{box}(\tau) \delta(t - \tau - nT_{vz}) d\tau = \sum_n x_d(n) \text{box}(t - nT_{vz}) = \\
 &= \sum_n x_d(n) \text{si} \left[ (t - nT_{vz}) \frac{\pi}{T_{vz}} \right] = \sum_n x_d(n) \text{si} \left( t \frac{\pi}{T_{vz}} - n\pi \right)
 \end{aligned}$$

- T.j. ako sumu váhovaných si funkcií, ktoré majú stredy v celých číslach a nuly v ostatných celých číslach
- Tento spôsob vyjadrenia signálu  $x(t)$  sa nazýva aj Shannon–Kotelnikov rad.

Intermezzo: **Môže mať signál konečný v čase konečné spektrum? A naopak signál konečný v spektre môže byť konečný v case?**

- Poznáte aparát, môžeme dokázať
- Konečnosť = nosič signálu je konečne veľký (t.j. jedná sa o **kompaktný nosič**)
- Nosič signálu – interval, na ktorom má signál nenulové hodnoty
- Kompaktný nosič – mimo nosiča má signál **presne nulové hodnoty**
- Efektívny nosič – mimo nosiča má signál **prilížne nulové (zanedbateľne malé) hodnoty**

Otázka znie teda: **Môže mať signál s kompaktným nosičom v čase kompaktný nosič aj vo frekvencii?**

- Odpoveď je NIE!
- Spravíme dôkaz **sporom**, prepokladajme, že môže.
- Navzorkujme signál vo frekvencii  $\Rightarrow$  v čase by sa mal speriodifikovať. Určite vieme zvoliť  $\omega_{vz}(t)$  tak, že perióda periodifikovaného signálu z veľkej časti siaha mimo pôvodného kompaktného nosiča (t.j. signál má na veľkom úseku hodnotu 0)
- Hodnota 0 na tomto úseku sa nedá vyskladať pomocou konečného počtu „frekvencií“  $\rightarrow$  **spor**

**Môže mať signál s kompaktným nosičom vo frekvencii kompaktný nosič aj včase?**

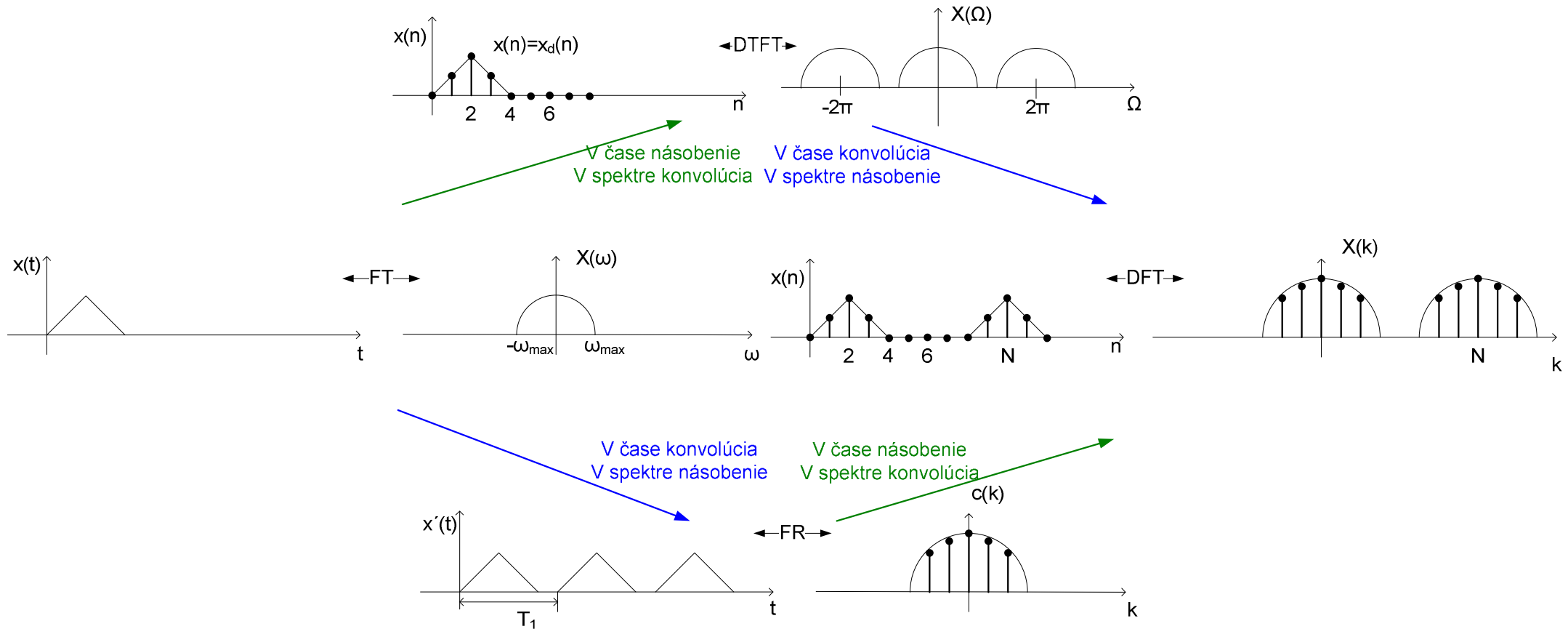
- Odpoveď je NIE! (Dokaz obdobne ako vyššie)

Dôsledky:

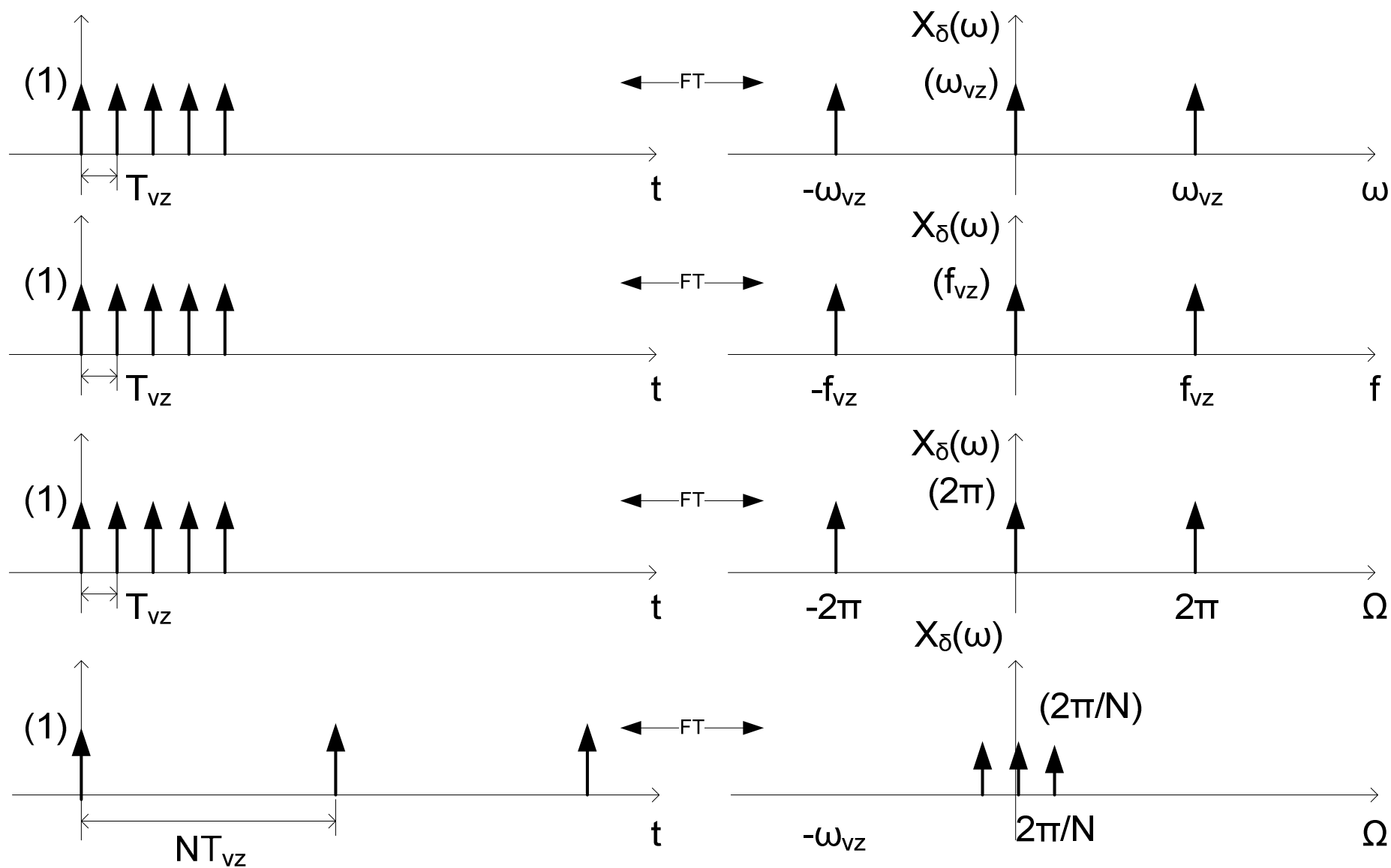
- Aka má  $x(t)$  kompaktný nosič v čase, potom pri vzorkovaní sa nám určite zleje spektrum, takže signál už nikdy presne nezrekonštruujeme
- Signál potrebujeme frekvenčne obmedziť pred vzorkovaním aby  $2f_{\max} \leq f_{vz}$ . To má ale za dôsledok, že signál v čase sa nám rozšíri na nekonečnú šírku (napr. Konvolúciou s množinou si funkcií)
- V praxu pracujeme so signálmi s efektívnymi nosičmi

# Diskrétna Fourierova Transformácia (DFT)

- Ako sa k nej dostaneme?



- Urobme pravú hornú vetvu z DTFT pomocou násobenia v spektre sekvenciou diskretových impulzov prejdeme k diskretnému spektru
- Aký tvar má sekvencia diracov v na osi  $\Omega$ ? Naše impulzy budú od seba vo frekvencii vzdialené  $2\pi / N$  a teda v čase budú vzdialené  $NT_{vz}$



$$X'(\Omega) = X(\Omega) \sum_k \frac{2\pi}{N} \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N}) = \sum_k X(\frac{2\pi k}{N}) \frac{2\pi}{N} \delta(\Omega - \frac{2\pi k}{N})$$

Vytvorme diskrétné spektrum

Odvodíme akému signálu v čase odpovedá (inverzná DTFT):

$$\begin{aligned}
 x(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X'(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_k X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \frac{2\pi}{N} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \right) e^{j\Omega n} d\Omega = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_k X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{N} \sum_k X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{j\frac{2\pi k}{N}n}
 \end{aligned}$$

Zjednodušíme zápis:

$$X(k) = X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \quad W_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$$

Dostávame:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_k X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_k X(k) W_N^{kn}$$

Analogicky sa dá odvodiť aj opačný vzťah:

$$X(k) = \sum_n x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_n x(n) W_N^{-kn}$$

Tým sme dostali vzorce na výpočet Diskrétnej Fourierovej transformácie (DFT) a inverznej DFT:

$$DFT : \quad X(k) = \sum_n x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_n x(n) W_N^{-kn}$$

$$DFT^{-1} : \quad x(n) = \frac{1}{N} \sum_k X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} \sum_k X(k) W_N^{kn} \quad \text{kde} \quad W_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$$