

FOURIEROVA TRANSFORMÁCIA (POKRAČOVANIE)

Veta o kmitočtovom posunutí (modulačný teorém)

Operácia v kmitočtovej oblasti, ktorá je obdobou oneskorenia signálu v časovej oblasti.

Ak zavedieme substitúciu $\Omega = \omega \pm \omega_0$ dostaneme:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$X(\omega \pm \omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(\omega \pm \omega_0)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) e^{\mp j\omega_0 t}] e^{-j\omega t} dt$$

Dostávame:

$$X(\omega + \omega_0) \rightarrow x(t) e^{-j\omega_0 t}$$

$$X(\omega - \omega_0) \rightarrow x(t) e^{j\omega_0 t}$$

Čomu sa rovná?

$$x_1(t) = x(t) \cos \omega_0 t$$

Použitím alternatívneho vyjadrenia pomocou goniometrických funkcií:

$$\begin{aligned} x(t)(\cos \omega_0 t - j \sin \omega_0 t) &\rightarrow X(\omega + \omega_0) \\ x(t)(\cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t) &\rightarrow X(\omega - \omega_0) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = x(t) \cos \omega_0 t \rightarrow \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0) = X_1(\omega)$$

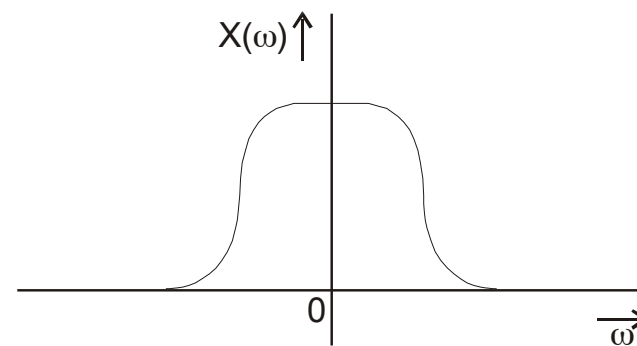
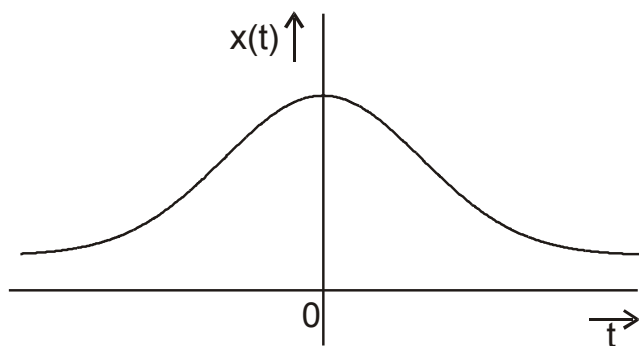
Posunutie spektrálnej funkcie $X(\omega)$ o hodnotu ω_0 a $-\omega_0$ odpovedá násobeniu signálu $x(t)$ reálnym harmonickým signálom.

Signál $x_1(t)$ odpovedá amplitúdovo namodulovanému signálu s potlačenou nosnou frekvenciou:

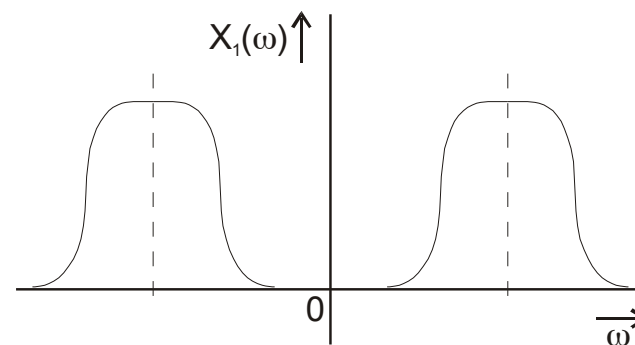
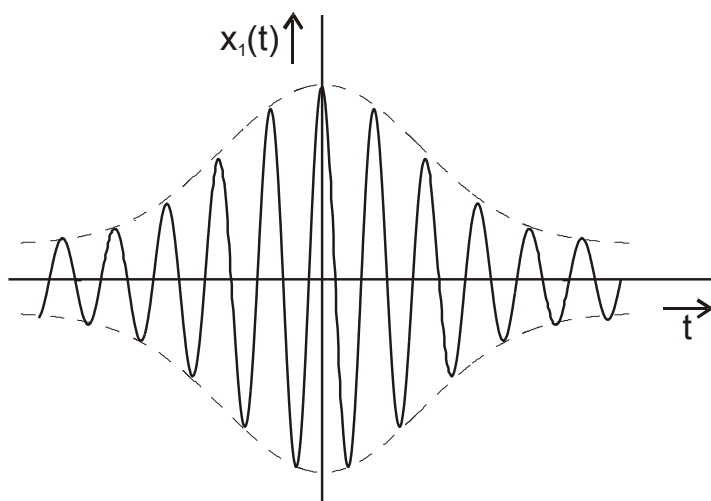
Signál $x(t)$ predstavuje **modulačný signál**.

Signál $\cos \omega_0 t$ je **nosným signálom** s frekvenciou ω_0 .

Ilustrácia násobenia signálu $x(t)$ reálnym harmonickým signálom

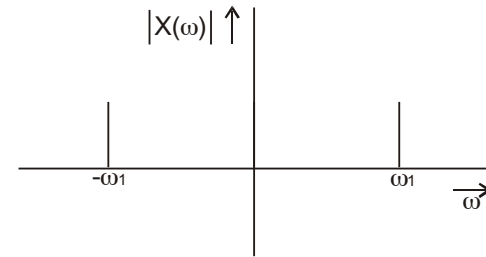
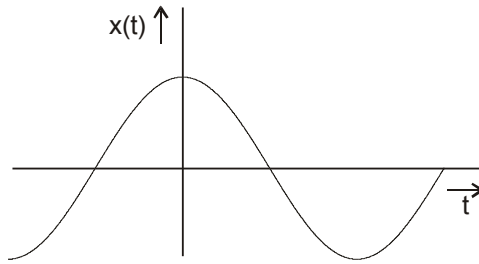


a)

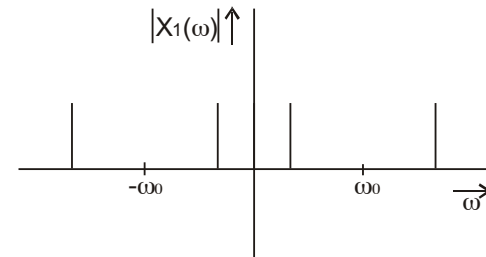
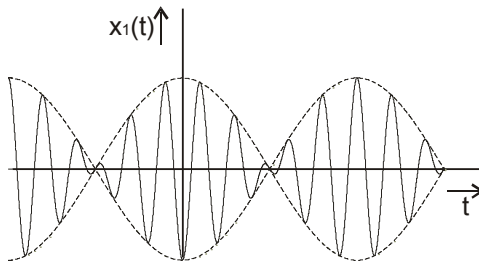


b)

Amplitúdová modulácia keď modulačný signál je harmonický signál $A \cos \omega_1 t$.



a)



b)

Veta o súčine (konvolúcii) signálov a spektra

A. Konvolúcia v kmitočtovej oblasti

Ak signál $x(t)$ vyjadríme ako súčin dvoch signálov $x(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$

$$x_1(t) \rightarrow X_1(\omega)$$

Pričom $x_2(t) \rightarrow X_2(\omega)$

Potom pre Fourierov obraz signálu $x(t)$ platí

$$F\{x(t)\} = F\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot x_2(t) e^{-j\omega t} dt$$

Použitím substitúcie $\omega = \Omega$
 $d\omega = d\Omega$

môžeme funkciu $x_1(t)$ vyjadriť v tvare $x_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$

Dosadením a po úprave dostaneme

$$F\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \right] x_2(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\Omega) \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j(\omega - \Omega)t} dt d\Omega$$

Na základe vety o kmitočtovom posunutí platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j(\omega - \Omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{j\Omega t} e^{-j\omega t} dt = X(\omega - \Omega)$$

Dosadením dostaneme $F\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\Omega) \cdot X_2(\omega - \Omega) d\Omega = \frac{1}{2\pi} X_1(\omega) * X_2(\omega) = X_1(f) * X_2(f)$

Poznámka:

Vyjadrením $x_2(t)$ namiesto $x_1(t)$

$$x_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\infty} X_2(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

dospejeme k tomu istému vzťahu:

$$F\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_2(\Omega) \cdot X_1(\omega - \Omega) d\Omega = X_1(f) * X_2(f)$$

Súčinu dvoch signálov v časovej oblasti zodpovedá konvolúcia ich spektrálnych funkcií v kmitočtovej oblasti.

B. Konvolúcia v časovej oblasti

Predpokladajme, že funkciu $X(\omega)$ môžeme vyjadriť ako súčin dvoch funkcií:

$$X(\omega) = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

Platí

$$x(t) = F^{-1}\{X(\omega)\} = F^{-1}\{X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)] e^{j\omega t} d\omega$$

$$t = \tau$$

Ak použijeme substitúciu $dt = d\tau$ potom $X_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$

Dosadením a úpravou dostaneme

$$F^{-1}\{X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right] X_2(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_2(\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right] d\tau$$

Na základe vety o časovom posunutí signálu

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_2(\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_2(\omega) e^{-j\omega\tau} e^{j\omega t} d\omega = x(t - \tau)$$

Dosadením dostávame výsledok:

$$F^{-1}\{X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau = x_1(t) * x_2(t)$$

Poznámka:

Vyjadrením $X_2(\omega)$ namiesto $X_1(\omega)$

$$X_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

dospejeme k tomu istému vzťahu:

$$F^{-1}\{X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) \cdot x_1(t - \tau) d\tau = x_1(t) * x_2(t)$$

Platí:

Súčinu dvoch signálov v kmitočtovej oblasti odpovedá konvolúcia príslušných signálov v časovej oblasti.

Konvolúcia je teda vzájomnú súvislosť medzi násobením dvoch signálov na jednej strane (napr. v kmitočtovej oblasti) a odpovedajúcou operáciou (konvolútorný súčin) na druhej strane (v časovej oblasti).

FOURIEROVA TRANSFORMÁCIA-VLASTNOSTI

- Platí $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(\omega)$, $t, x(t) \in R$; $X(\omega) \in C$
- Platí $y(t) \xleftrightarrow{FT} Y(\omega)$, $t, y(t) \in R$; $Y(\omega) \in C$

Názov	Časová oblasť	Frekvenčná oblasť	Poznámka
	$x(t)$, neperiodické $y(t)$, neperiodické	$X(\omega)$, neperiodické $Y(\omega)$, neperiodické	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$
Linearita	$\alpha x(t) + \beta y(t)$	$\alpha X(\omega) + \beta Y(\omega)$	
Časové posunutie	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$	odvodené
Časové otočenie	$x(-t)$	$X(-\omega)$	odvodené
Posunutie vo frekvencii	$x(t) e^{-j\omega_0 t}$ $x(t) e^{j\omega_0 t}$	$X(\omega + \omega_0)$ $X(\omega - \omega_0)$	odvodené
Zmena mierky	$x(at)$	$F\{x(at)\} = \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$	odvodené
Konvolúcia v čase	$x(t) * y(t)$	$X(\omega) Y(\omega) = X(f) Y(f)$	odvodené
Násobenie v čase	$x(t) y(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega) = X(f) * Y(f)$	odvodené
Časová derivácia	$d^n x(t) / dt^n$	$(j\omega)^n X(\omega)$	

Časová integrácia	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau;$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$	
Symetria v spektre	$x(t)$	$X(\omega) = \bar{X}(-\omega)$	
Rayleighova veta	$E = \int_{-\infty}^{\infty} i^2(t) dt$	$E = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} I(\omega) ^2 d\omega = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega$	odvodené
Dualita	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$	odvodené

Porovnajte si vlastnosti s vlastnosťami Fourierových radov ...

Príklady MATLAB

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Platí

- $X(\omega)$ budeme vyhodnocovať iba pre niektoré ω .

Zamyslenie

- Čo ak budeme vyhodnocovať hodnotu $X(\omega)$ v násobkoch $\omega_1 = 2\pi / T_1$? Označme ako $X(k\omega_1)$:

$$X(k\omega_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt$$

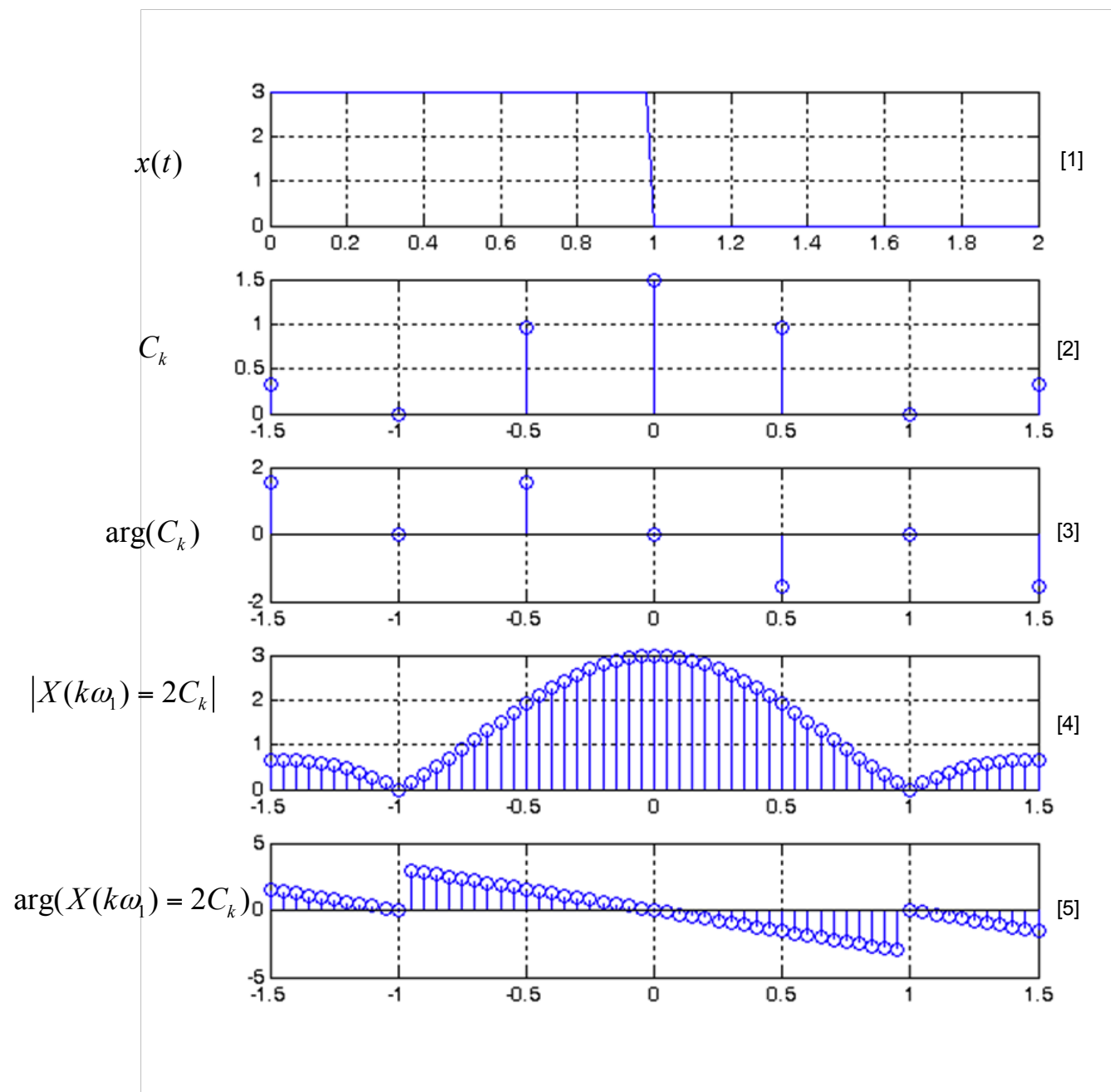
porovnajme so vzorcom na výpočet FR

$$C_k = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt$$

$$X(k\omega_1) = T_1 C_k$$

Platí:

Porovnanie spektier „box“ funkcie [1]: a) periodickej s periódou 2 -> FR [2][3] b) neperiodickej -> FT [4][5]
 (hodnota FT je vypočítaná a nakreslená 10x hustejšie ako je to pri FR)



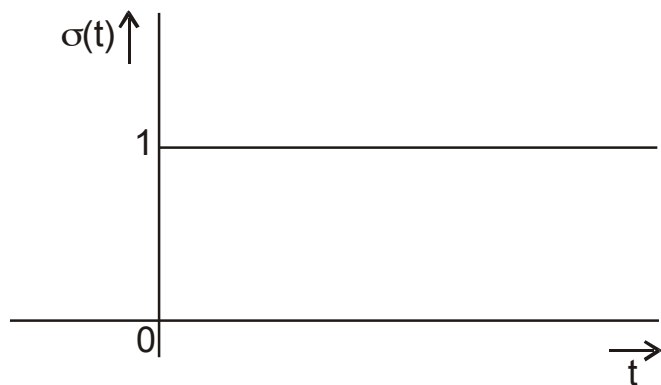
Fourierova transformácia elementárnych funkcií

Jednotkový skok

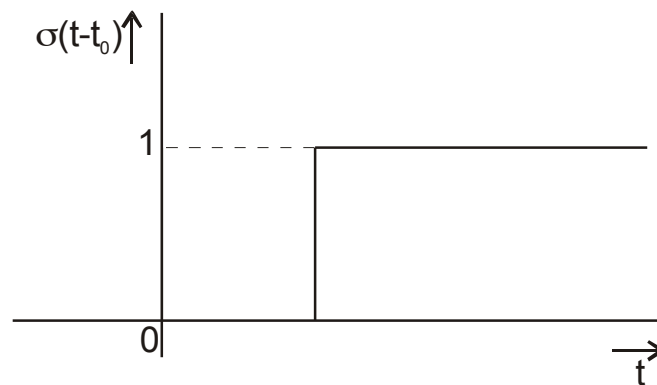
Pre jednotkový skok $\sigma(t)$ - uvádza tiež pod názvom Heavisideova funkcia platí

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1 & \text{pre } t > 0 \\ 0 & \text{pre } t \leq 0 \end{cases}$$

$$\sigma(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{pre } t > t_0 \\ 0 & \text{pre } t \leq t_0 \end{cases}$$



a)



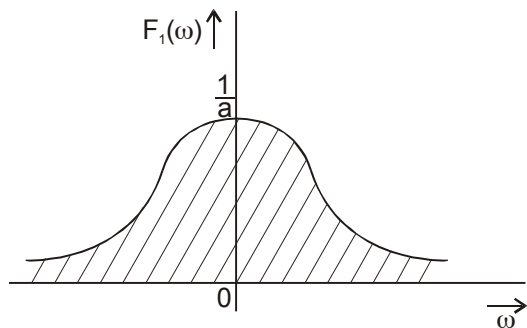
b)

Nahradíme funkciu $\sigma(t)$ funkciou $f(t) = \sigma(t)e^{-at}$ pre $a \rightarrow 0$.

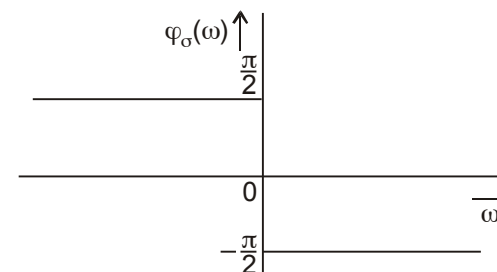
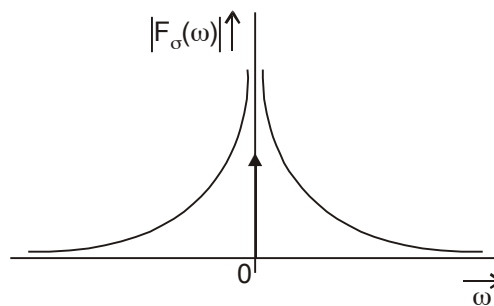
$$\begin{aligned} F\{\sigma(t)e^{-at}\} &= F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t)e^{-at}e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{1}{a+j\omega} \left[e^{-(a+j\omega)t} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{a+j\omega} \left[\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(a+j\omega)t} - \lim_{t \rightarrow 0} e^{-(a+j\omega)t} \right] = \\ &= -\frac{1}{a+j\omega} [0 - 1] = \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$

Hľadáme limitu pre $a \rightarrow 0$

$$F_{\sigma}(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} F(\omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a + j\omega} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a - j\omega}{a^2 + \omega^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{a^2 + \omega^2} + \frac{1}{j\omega} = F_1(\omega) + F_2(\omega)$$



$a \rightarrow 0$



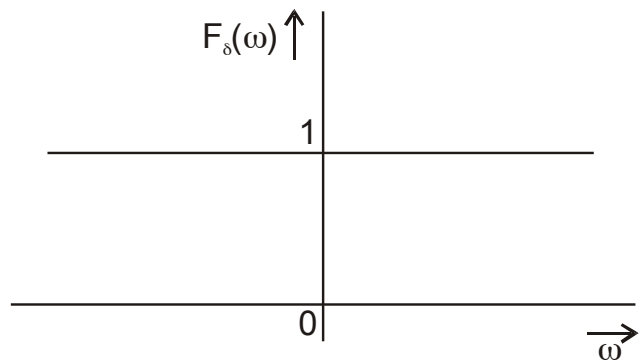
- Plocha pod krivkou $F_1(\omega)$ je nezávislá na hodnote a . Jej hodnota je rovná π .
- Pre $a \rightarrow 0$ sa bude krivka zužovať, ale jej hodnota v okolí bodu $\omega = 0$ narastať. V limitnom prípade pre $a \rightarrow 0$ sa zmení na jednotkový impulz $\delta(t)$.
- Spektrálna funkcia jednotkového skoku $\sigma(t)$ má teda tvar

$$F_{\sigma}(\omega) = F_1(\omega) + F_2(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Jednotkový impulz

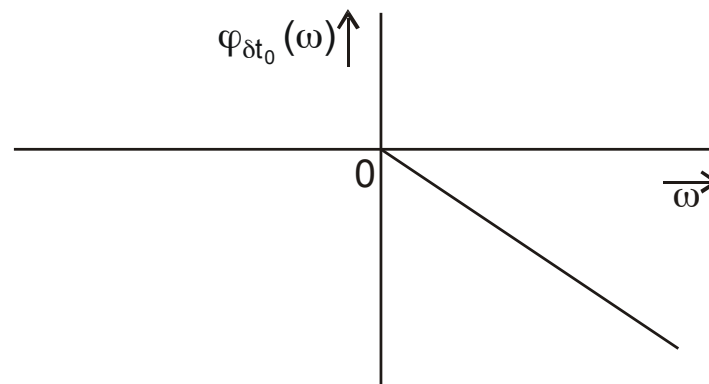
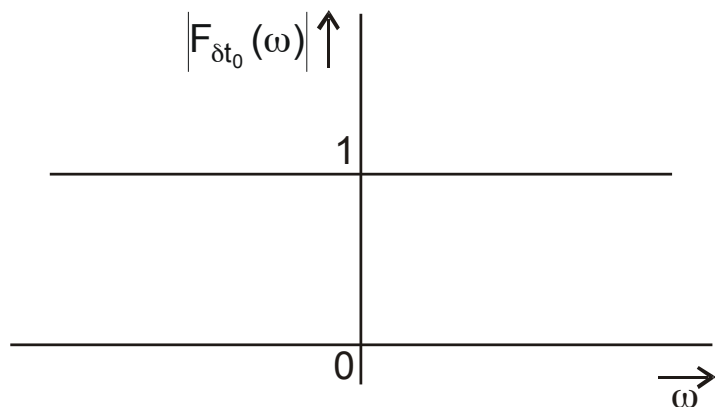
Pre spektrálnu funkciu $F_{\delta}(\omega)$ jednotkového impulzu $\delta(t)$ platí

$$F\{\delta(t)\} = F_{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \left[e^{-j\omega t} \right]_{t=0} = 1$$



Spektrálna funkcia posunutého jednotkového impulzu $\delta(t - t_0)$:

$$F\{\delta(t - t_0)\} = F_{\delta_{t_0}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = \left[e^{-j\omega t} \right]_{t=t_0} = e^{-j\omega t_0}$$

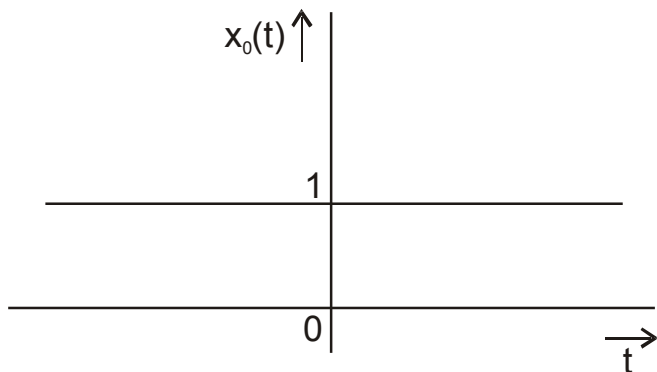


Jednotkový impulz vo frekvenčnej oblasti

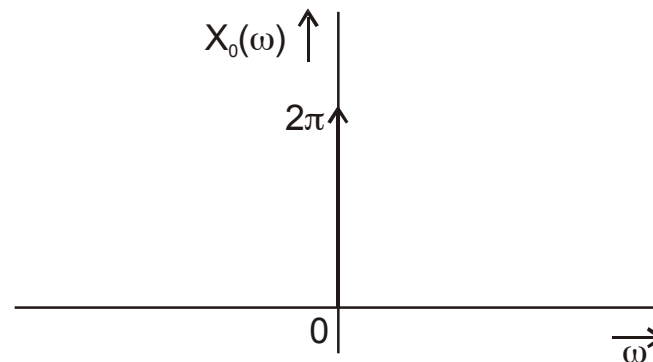
Nech $X(\omega) = \delta(\omega)$ potom

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \quad \text{t.j.} \quad \frac{1}{2\pi} \xleftrightarrow{FT} \delta(\omega) \quad \text{resp.} \quad 1 \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega)$$

Signálu $2\pi\delta(\omega)$ (jednotkovému impulzu o mohutnosti 2π) odpovedá v časovej oblasti signál $x_0(t) = 1$ (teda jednosmerná zložka).



b)



a)

Vlna vo frekvenčnej oblasti

Uvažujme ďalej signál $X_1(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_1)$.

Na základe inverznej Fourierovej transformácie pre signál $x_1(t)$ platí

$$x_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_1) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_1 t}$$

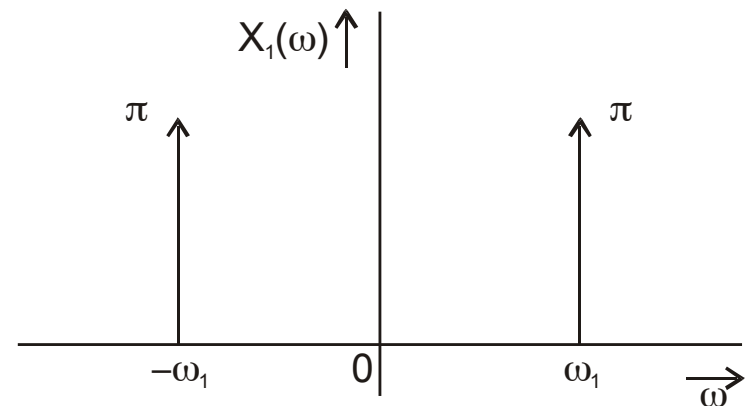
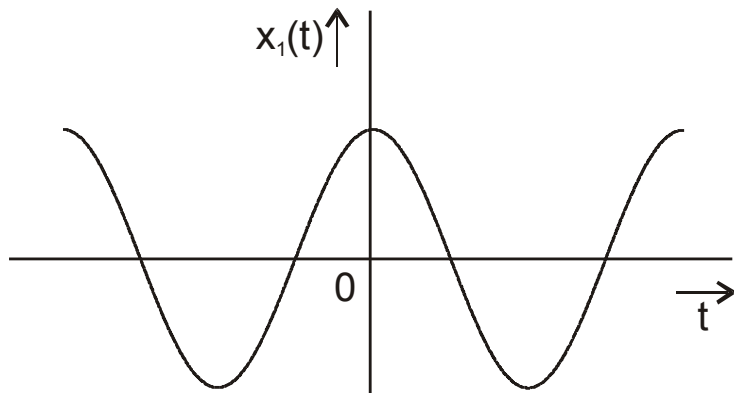
T.j. výsledkom je „komplexná vlna“

$$e^{j\omega_1 t} \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega - \omega_1)$$

Uvážme že $\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$

$$x_1(t) = \cos(\omega_1 t) \xleftrightarrow{FT} X(\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_1) + \pi\delta(\omega + \omega_1)$$

Potom:



Periodický rad jednotkových impulzov (revízia)

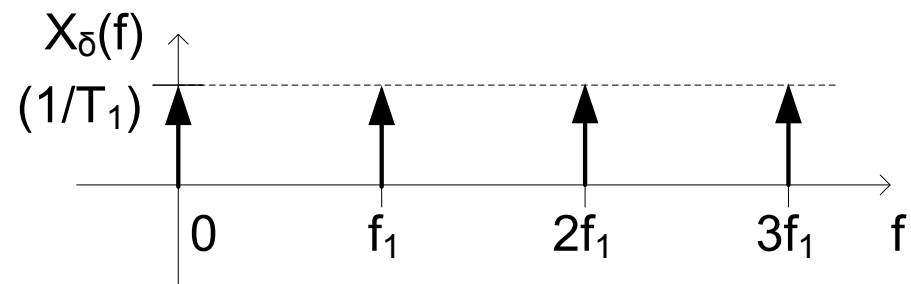
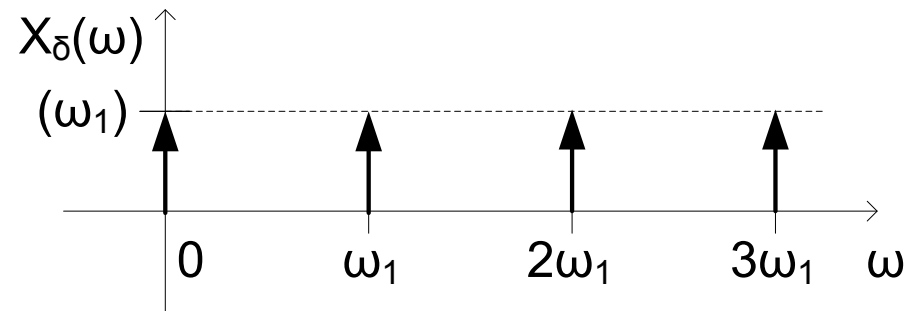
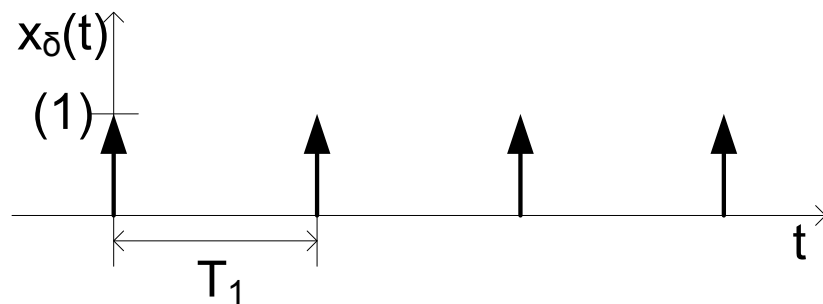
Pomocou FR sme dostali:

$$x_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t} = \frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_1 t}$$
$$e^{jk\omega_1 t} \xleftrightarrow{FT} 2\pi \delta(\omega - k\omega_1)$$

Pre vlnu vo frekvenčnej oblasti platí

Potom (uvážime, že $\omega_1 = 2\pi / T_1$)

$$\frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_1 t} \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - k\omega_1)$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) \xleftrightarrow{FT} \omega_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_1) \quad \text{resp.} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) \xleftrightarrow{FT} 1/T_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k/T_1)$$



Tvary FT (doplnenie)

Časová oblasť	Frekvenčná oblasť (uhlová frekvencia)	Frekvenčná oblasť (frekvencia v Hz)
$x(t)$, neperiodické	$X(\omega)$, neperiodické $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$ $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$	$X(f)$, neperiodické $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$ $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$

Porovnanie tvaru FR a FT

Zo spojitého spektra $X(\omega)$ signálu $x(t)$ vyrobme diskkrétne tak, že ho budeme násobiť sekvenciou Diracových impulzov:

$$X'(\omega) = X(\omega) X_\delta(\omega) = X(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_1 \delta(\omega - k\omega_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_1 X(k\omega_1) \delta(\omega - k\omega_1)$$

Výsledkom je sekvencia Diracových impulzov:

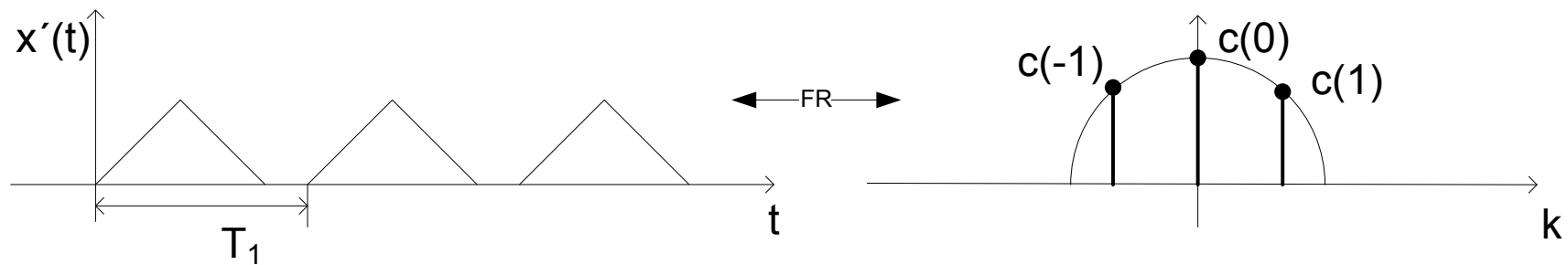
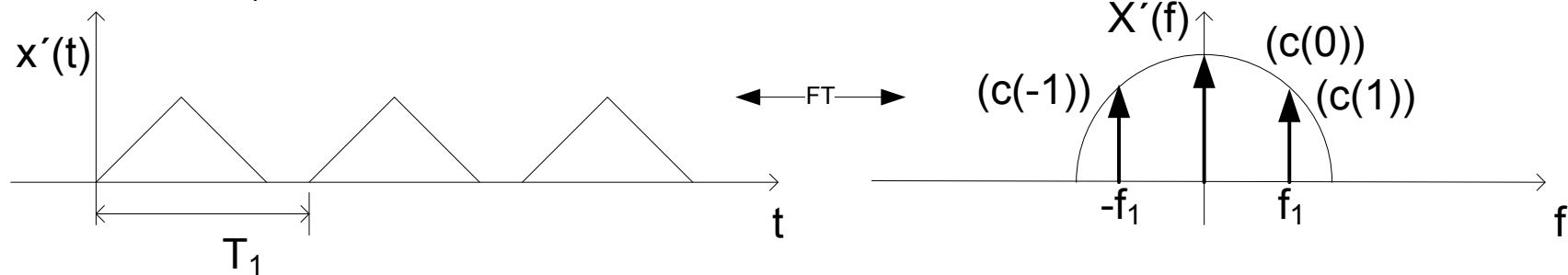
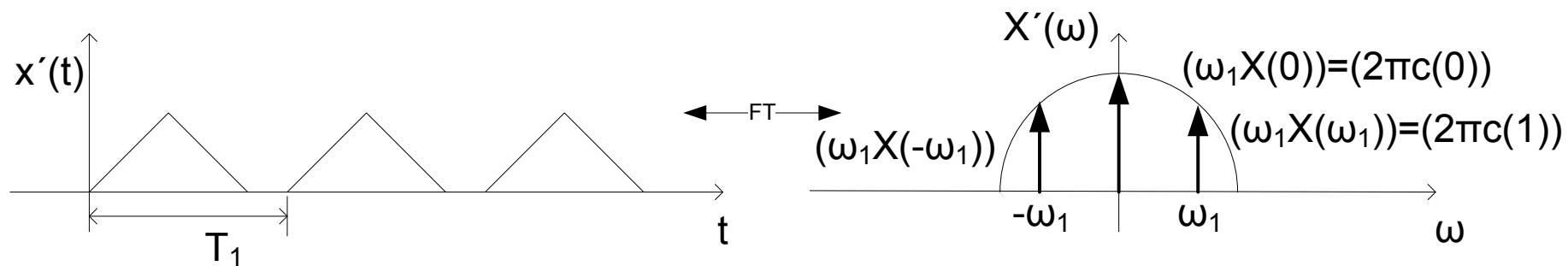
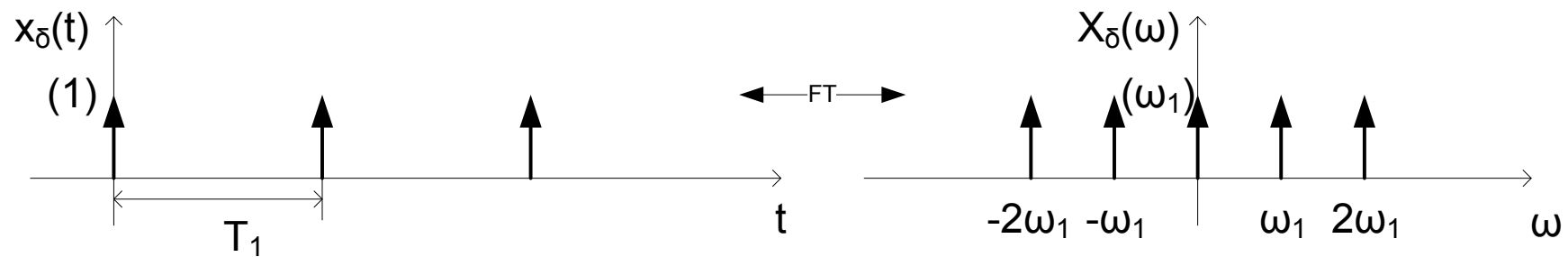
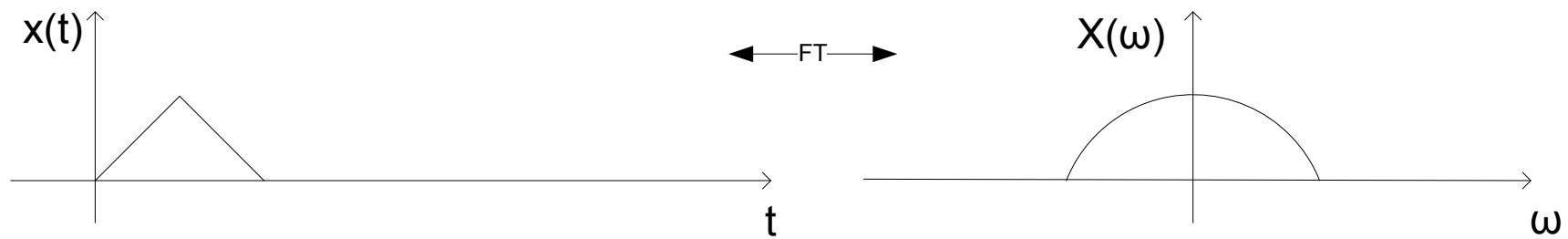
- Na osi ω s mohutnosťami $\omega_1 X(k\omega_1) = \omega_1 T_1 C_k = 2\pi C_k$
- Na osi f s mohutnosťami $1/T_1 X(kf_1) = (1/T_1) T_1 C_k = C_k$

T.j. výsledkom na osi f je diskkrétne spektrum s mohutnosťami koeficientov ako pri FR.

Čo vznikne v čase? Tam sa odpovedajúce signály konvolvujú:

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) * x_\delta(t) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau - nT_1) d\tau = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau - nT_1) x(\tau) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_1) \end{aligned}$$

T.j. výsledkom je periodifikovaný signál $x(t)$, t.j. signál
$$x'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT_1)$$



Čo sme videli?

- Násobenie vo frekvencii vytvorilo diskkrétne spektrum
 - Zo spojitého spektra sme vytvorili diskkrétne – použili sme iba vzorky spektra – t.j. spektrum sme tzv. „**ideálne navzorkovali**“
- Táto operácia zároveň spôsobila periodifikáciu signálu v čase
 - Ak by sme nevhodne vzorkovali spektrum, periodifikovaný signál by bol „zliaty“ (jednotlivé opakované verzie by sa potrekrývali a posčítavali „cez seba“)

Vieme proces obrátiť? T.j. vieme zo vzoriek spektra zrekonštruovať pôvodné spektrum?

Odpoveď: vieme, ak sa nám v jednotlivé opakované verzie nepoprekrývali „cez seba“)

Začneme zvol’na a celý proces a jeho dôsledky si radšej ukážeme pri vzorkovaní signálu v čase.

Ideálne vzorkovanie v čase

Majme $x(t)$ - reálny spojitý neperiodický signál so spektrom $X(\omega)$.

Z neho vytvoríme diskretný signál $x_d(n)$ tak, že budeme brať so zvolenou frekvenciou vzorky zo signálu $x(t)$ pomocou vzťahu $x_d(n) = x(nT_{vz})$.

Otázky

- Majú rôzne $x(t)$ vždy od seba rôzne $x_d(n)$?
- Ak $x(t)$ má spektrum $X(\omega)$, aké spektrum má $x_d(n)$?
- Dokážeme z $x_d(n)$ rekonštruovať povodný $x(t)$?

Na tieto otázky budeme postupne odpovedať ...

Príklad:

Majme signál, $x(t)$ ktorý je na intervale $<0, T>$, $T=2$ definovaný nižšie a mimo tohto intervalu má hodnoty nulové:

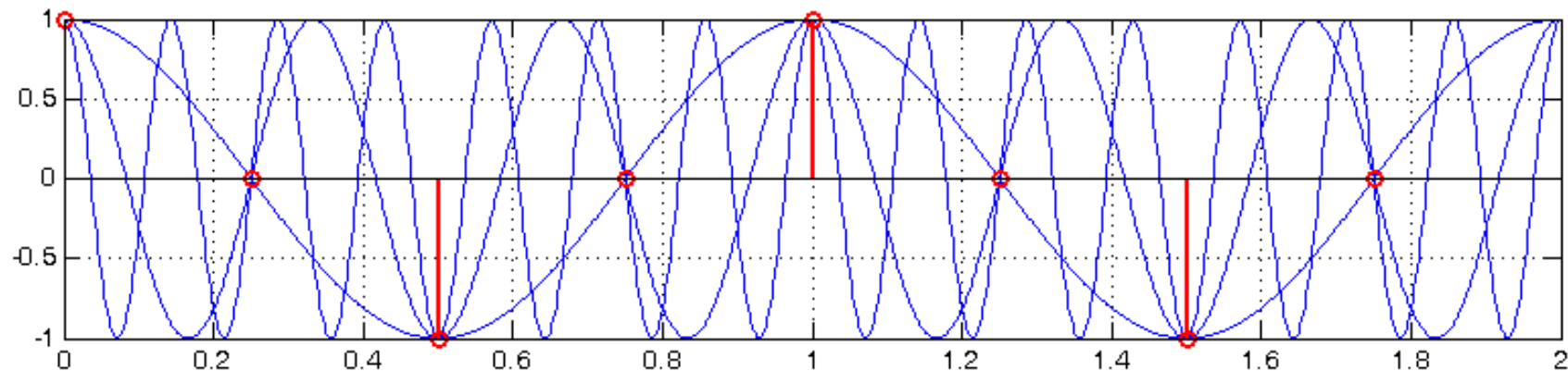
- a) $x(t) = \cos(2\pi t)$, harmonický signál s frekvenciou 1Hz
- b) $x(t) = \cos(6\pi t)$, harmonický signál s frekvenciou 3Hz
- c) $x(t) = \sin(14\pi t)$, harmonický signál s frekvenciou 7Hz

Vytvorte diskkrétne verzie týchto signálov, použite vzorkovaciu frekvenciu 4Hz.

Riešenie:

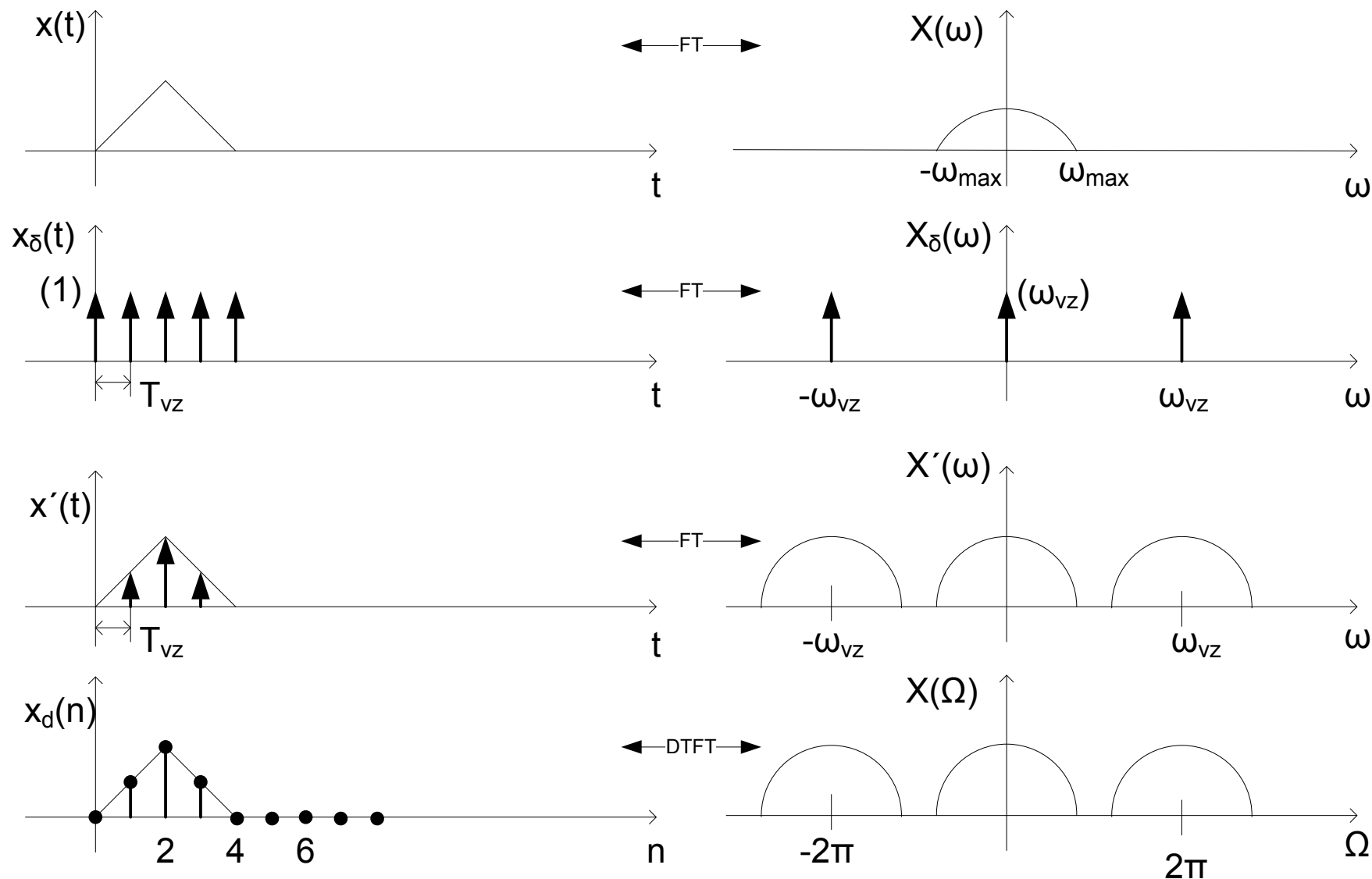
- a) b) c) vždy $x_d(n) = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0)$.

Vidíme, že $x_d(n)$ nevieme od seba odlíšiť ... toto v reáli asi nechceme robiť



Ako zistíme spektrum $x_d(n)$? Predsa pomocou sekvencie Diracových impulzov a pomocou pravidla, že násobenie v čase odpovedá konvolúcii v spektre.

Odpovedajúcu transformáciu budeme nazývať „DTFT“ (Discrete Time Fourier transform).



Z obrázku bolo pekne vidieť nasledovné veci:

- Pri vzorkovaní musí platiť $\omega_{vz} \geq 2\omega_{\max}$ (Shannon-Kotelnikov teorém) ináč sa nám spektrum „zleje“
- Keď sa spektrum zleje – vzniká aliasing
 - Vzniká nesprávny frekvenčný obsah, hoci pôvodne v signále prítomný nebol.
 - Napr. 3Hz a 7Hz signály interpretujeme ako prítomnosť 1Hz signálu (nevieme ich od prítomnosti 1Hz signálu odlíšiť)

- Nové spektrum $X'(\omega)$ vzniklo periodifikáciou pôvodného a zväčšením s faktorom $\omega_{vz} / 2\pi$,

t.j.:
$$X'(\omega) = \sum_n \frac{\omega_{vz}}{2\pi} X(\omega - n\omega_{vz})$$

○ Využili sme pritom
$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$$

- a uvážili, že sekvencia použitých dirakových impulzov má vo frekvencii mohutnosť ω_{vz}