

FOURIEROV RAD-VLASTNOSTI

- Vlastnosti uvedieme v exponenciálnom tvare
- Platí $x(t) \xleftrightarrow{FR} X(k)$, $t, x(t) \in R$; $k \in Z$; $X(k) \in C$
- Platí $y(t) \xleftrightarrow{FR} Y(k)$, $t, y(t) \in R$; $k \in Z$; $Y(k) \in C$

Názov	Časová oblasť	Frekvenčná oblasť	Poznámka
	$x(t)$, perióda T_1 $y(t)$, perióda T_1	$X(k)$, k=1 odpovedá $\omega_1 = 2\pi / T_1$ $Y(k)$, k=1 odpovedá $\omega_1 = 2\pi / T_1$	$X(k) = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt$ $x(t) = \sum_k X(k) e^{jk\omega_1 t}$
Linearita	$\alpha x(t) + \beta y(t)$	$\alpha X(k) + \beta Y(k)$	
Časové posunutie	$x(t - t_0)$	$X_k e^{-jk\omega_1 t_0}$	
Časové otočenie	$x(-t)$	$X(-k)$	
Zmena mierky	$x(at)$, perióda T_1 / a	$X(k)$, k=1 odpovedá $\omega_1 = 2\pi a / T_1$	
Konvolúcia v čase	$x(t) * y(t) = \int_{T_1} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$	$TX(k)Y(k)$	
Násobenie v čase	$x(t)y(t)$	$X(k) * Y(k)$	
Časová derivácia	$dx(t) / dt$	$jk\omega_1 X(k)$	
Časová integrácia	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$;	$\frac{1}{jk\omega_1} X(k)$	
Symetria v spektre	$x(t)$	$X(k) = \bar{X}(-k)$	
Parsevalova teoréma	$P_s = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} x^2(t) dt$	$P_s = \sum_k X ^2(k)$	Odvođené na prednáške 2

- Vlastnosti – využitie (napr. vpi počítaní príkladov)
 - Linearita: ako vyzerajú spektrá zložitejších signálov ak poznáme spektrá jednoduchších?)
 - Časový posun: ako vyzerá spektrum posunutého signálu? Čo dokáže zmeniť posun v čase?
 - má zmena mierky vplyv?
- Vlastnosti – odvodenie
 - vedieť odvodiť aspon 3 vlastnosti

Príklady MATLAB

- Na príklade harmonického signálu – čo ak sa nestrafíme do skutočnej periódy signálu? (nielen že získame „falošné“ frekvencie, ale stratíme aj skutočné!)
- Na príklade pravouhlého signálu – čo sa stane ak zvažujeme iba periódu, mení sa frekvenčný obsah? (napr. obsahuje signál frekvenciu 1Hz?)
- Príklad šikmého signálu - ...

Interpretácia FR v Hilbertových priestoroch

Množina funkcií $\{e_k(t) = e^{jkt}; k \in Z\}$ tvorí ortonormálnu bázu priestoru všetkých po štvorcoch integrovateľných funkcií na intervale $\langle -\pi, \pi \rangle$, resp. $\langle 0, 2\pi \rangle$. Platí:

$$x(t) = \sum_k \langle x(t), e_k(t) \rangle e_k(t) = \sum_k X(k) e_k(t)$$

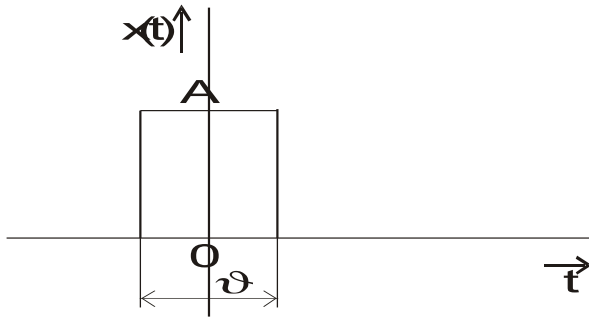
OPAKOVANIE:

- Čo je to Báza? Je to Množina lineárne nezávislých funkcií, ktorých kombináciou viem dostať všetky ostatné funkcie z daného priestoru
- Lineárna nezávislosť : funkciu nie je možné vyjadriť lineárnou kombináciou iných funkcií z množiny
- po štvorcoch integrovateľné: $\int_{-\pi}^{\pi} x^2(t) dt < \infty$
- ortonormálna báza $\langle e_k(t), e_l(t) \rangle = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases}$

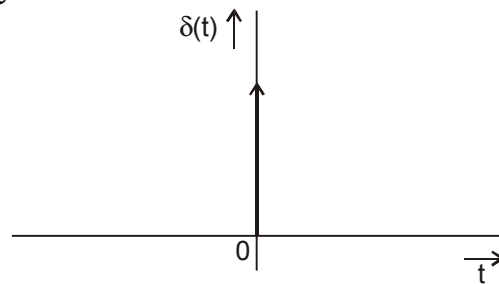
Diracov impulz a diracov “hreiben“ (comb)

Diracov impulz - opakovanie

Uvažujeme pravouhlý impulz pre ktorý platí $A = \frac{1}{\vartheta}$

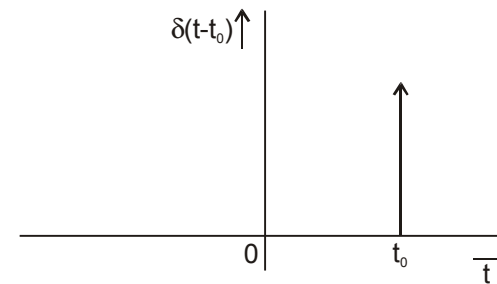


- Pre plochu ohraničenú impulzom potom platí $P = A\vartheta = 1$
- Ak pri zachovanej jednotkovej ploche $\vartheta \rightarrow 0$, potom $A \rightarrow \infty$
- výsledný impulz nazývame jednotkový impulz resp. **Diracov impulz** (funkcia) $\delta(t)$



a)

$\delta(t)$



b)

$\delta(t-t_0)$

- Výsledkom nie je klasická funkcia, ale skor „rozdelenie“

Pre Diracov impulz platí

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{pre } t = 0 \\ 0 & \text{pre } t \neq 0 \end{cases}$$

Ďalej platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \qquad \text{resp.} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

- a) $-\infty$ resp. $-\infty$
 b) Diracova funkcia má nekonečnú energiu

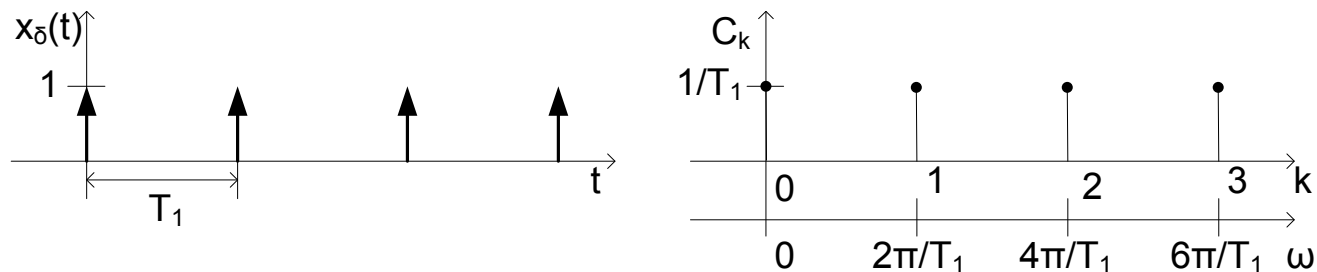
c) Súčin $A\delta(t)$ vyjadruje jednotkový impulz o **intenzite(mohutnosti)** A .

d) Pre integrál súčinu jednotkového impulzu a ľubovoľnej funkcie $x(t)$, spojitej v bode $t=0$, resp. $t=t_0$ platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)x(t)dt = x(0) \qquad \text{resp.} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)x(t)dt = x(t_0)$$

- e) Súčin funkcie $x(t)$ a jednotkového impulzu $\delta(t - t_0)$ je jednotkový impulz o intenzite $x(t_0)$, teda $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$
 f) Konvolúcia funkcie $x(t)$ s jednotkovým impulzom $\delta(t - t_0)$ je pôvodná funkcia $x(t)$ posunutá o t_0 , teda dostaneme $x(t - t_0)$

Periodický rad jednotkových impulzov (Diracov „hrebeň“)



$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1)$$

Keďže sa jedná o periodickú funkciu, môžeme ju rozvinúť do Fourierovho radu, pre ktorý platí

$$x_\delta(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t}$$

Pre koeficienty C_k potom platí

$$C_k = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x_\delta(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \delta(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{1}{T_1}$$

Následne

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t} = \frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_1 t}$$

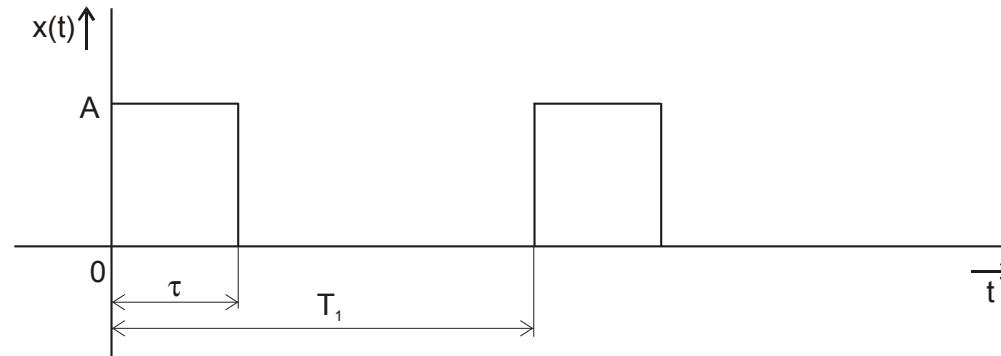
FOURIEROVA TRANSFORMÁCIA

Analyzujeme neperiodické signály

- majú aj oni frekvenčný obsah (hoci sú typicky konečné v čase), má zmysel hovoriť o „frekvencii“ ?
- majú typicky konečnú, nenulovú energiu $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$

Ako zistiť frekvenčný obsah („Inžinierske“ odvodenie)

Uvažujme periodický signál $x(t)$ uvedený na obr. 3.26, pre ktorý platí



Predpokladajme teraz, že periódu T_1 tohoto signálu necháme narastať tak, že $T_1 \rightarrow \infty$.



Ak $T_1 \rightarrow \infty$:

- Základná harmonická ω_1 má potom veľmi malú hodnotu. Pre vzdialenosť medzi susednými harmonickými zložkami platí $\Delta\omega = (n+1)\omega_1 - n\omega_1 = \omega_1$ pričom $\Delta\omega \rightarrow d\omega$
- $n\omega_1$ môže nadobúdať ľubovoľnú spojitú hodnotu ω_n , t.j. $n\omega_1 \rightarrow \omega_n \rightarrow \omega$
- Pre periódu platí $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{d\omega}$ t.j. $\frac{1}{T_1} = \frac{1}{2\pi} d\omega$

Nasledne

$$x(t) = \sum_n \left(\frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \right) e^{jn\omega_1 t}$$

môžeme prepísať do tvaru

$$x(t) = \frac{1}{T_1} \sum_n \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \right] e^{jn\omega_1 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] e^{j\omega t} d\omega =$$

Z tohoto vzťahu vyplýva:

Spätná FT

Priama FT

a)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

pričom

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

b) Resp.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

pričom

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

– Alternatíva b) sa v literatúre používa častejšie a preto v ďalšom budeme uvažovať s ňou.

- $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ nazývame Fourierovým obrazom funkcie $x(t)$
 - $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$ nazývame originálom (predmetom) Fourierovej transformácie
 - Fourierov obraz $X(\omega)$ je frekvenčnou reprezentáciou signálu $x(t)$ a nazývame ho tiež *spektrálnou funkciou*.
 - $X(\omega)$ Môžeme vyjadriť v tvare
- $$X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = \operatorname{Re}\{X(\omega)\} + j\operatorname{Im}\{X(\omega)\} = |X(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

kde

$|X(\omega)|$ je spektrálna hustota amplitúd

$\arg \varphi(\omega)$ je fázové spektrum

Spektrum neperiodického signálu nie je diskkrétne (čiarové) ale spojité.

Názov	Časová oblasť	Frekvenčná oblasť	Poznámka
	$x(t)$, neperiodické $y(t)$, neperiodické	$X(\omega)$, neperiodické $Y(\omega)$, neperiodické	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$ $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$

Energetické pomery u neperiodických signálov

Energetické pomery vyjadrujeme celkovou energiou, ktorú signál $x(t)$ odovzdá do reálnej záťaže s hodnotou 1Ω .

Pre celkovú energiu E platí

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} i^2(t) dt$$

Vyjadrame si $i(t)$ pomocou jeho Fourierovho obrazu:

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Následne

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} i(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega$$

pretože

$$\int_{-\infty}^{\infty} i(t) e^{j\omega t} dt = \bar{I}(\omega)$$

dostaneme

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) \bar{I}(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |I(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega$$

t.j. rovnosť energie neperiodického signálu v jeho časovom a frekvenčnom vyjadrení (**Rayleighova veta**, ktorá je obdobou **Parsevalovej vety** platnej pre periodické priebehy)

Platí

- Zatiaľ čo u periodických signálov môžeme stredný výkon vo frekvenčnej oblasti rozložiť na jednotlivé harmonické signálu, u neperiodických signálov sú amplitúdy a teda aj energia jednotlivých spektrálnych zložiek nekonečne malé.
- Energia v určitom frekvenčnom pásme má konečnú hodnotu. Napr. elementárna energia obsiahnutá v elementárnom

frekvenčnom pásme šírky $d\omega$ je
$$dE = \frac{1}{\pi} |I(\omega)|^2 d\omega$$

- Energiu na jednotkovú šírku pásma nazývame spektrálna hustota energie, s rozmerom $A \cdot Hz^{-1}$. Platí

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} |I(\omega)|^2$$

$$E_{\Delta\omega} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |I(\omega)|^2 d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} S(\omega) d\omega$$

- Pre energiu vo frekvenčnom pásme (ω_1, ω_2) platí

Vzťah medzi funkciami v časovej a frekvenčnej oblasti

- Uvažujeme reálnu funkciu času $f(t)$ a jej komplexnú spektrálnu funkciu $F(\omega)$
- Platí:

$$\bar{F}(\omega) = F(-\omega)$$

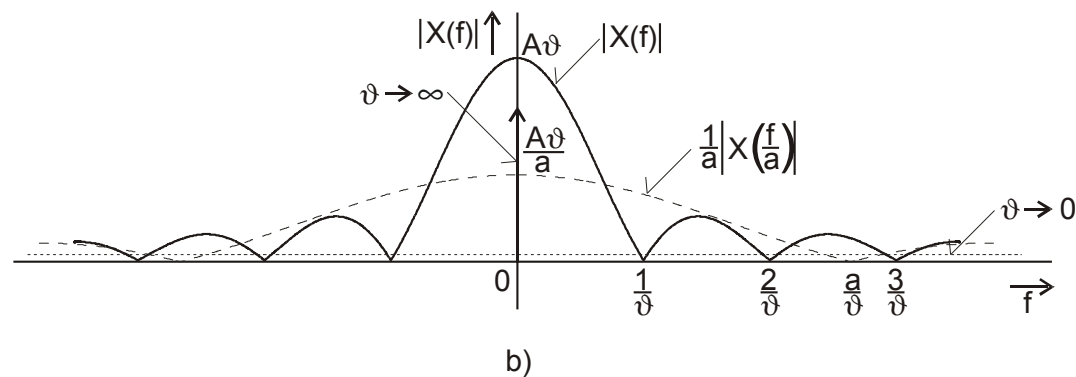
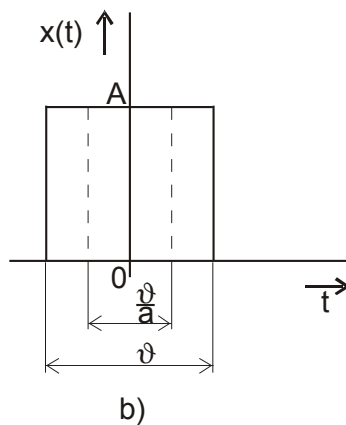
$$\bar{F}(-\omega) = F(\omega)$$

Základné vlastnosti - Veta o šírke signálu a spektra

Nebudeme tu podrobne rozoberať všetky vlastnosti Fourierovej transformácie (Fourieroveho integrálu), ale obmedzíme sa len na tie, ktoré sú z pohľadu teórie signálov rozhodujúce.

Uvažujeme jednorázový impulz ako signál $x(t)$, pre ktorý platí

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{pre } t \in \left(-\frac{\vartheta}{2}; \frac{\vartheta}{2}\right) \\ 0 & \text{pre ostatné } t \end{cases}$$



Fourierovou transformáciou dostaneme spektrálnu funkciu $X(\omega)$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\frac{\vartheta}{2}}^{\frac{\vartheta}{2}} e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{-j\omega} \left[e^{-j\omega t} \right]_{-\frac{\vartheta}{2}}^{\frac{\vartheta}{2}} = \frac{A}{-j\omega} \left(-2j \sin \omega \frac{\vartheta}{2} \right) = A\vartheta \frac{\sin \omega \frac{\vartheta}{2}}{\omega \frac{\vartheta}{2}} = A\vartheta \operatorname{sinc} \omega \frac{\vartheta}{2}$$

Ako bude vyzerat' spektrálna funkcia signálu $x(at)$?

$$x(at) = \begin{cases} A & \text{pre } t \in \left(-\frac{\vartheta}{2a}; \frac{\vartheta}{2a}\right) \\ 0 & \text{pre ostatné } t \end{cases}$$

Pre spektrálnu funkciu signálu $x(at)$ platí

$$F\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j\omega t} dt$$

Ak použijeme substitúciu $at = \tau$ a predpokladáme, že $F\{x(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ dostaneme

$$F\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega \frac{\tau}{a}} \frac{1}{a} d\tau = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega \frac{\tau}{a}} d\tau = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\frac{\omega}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Zhrnutie:

- funkcii $x(t)$ odpovedá spektrálna funkcia $X(\omega)$ a funkcii $x(at)$ odpovedá spektrálna funkcia $\frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$,
- a násobnému skráteniu signálu v čase odpovedá a násobné rozšírenie spektrálnej funkcie,
- a násobnému skráteniu signálu v čase (pri zachovaní amplitúdy signálu) odpovedá a násobné zmenšenie modulu spektrálnej funkcie.

Základné vlastnosti - Veta o reciprocite (dualite) signálov a spektra

Ak porovnáme transformačné vzťahy pre priamu a spätnú FT vidíme, že až na konštantu a znamienko v exponente sú podobné. Ak vo vzťahu pre spätnú FT

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

urobíme substitúciu $t' = -t$, potom dostaneme

$$x(-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-j\omega t'} d\omega$$

zameňme t' a ω

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t') e^{-j\omega t'} dt'$$

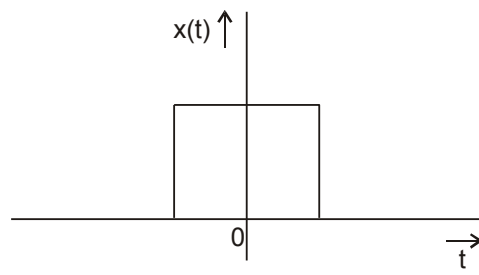
Porovnajme tento vzťah so vzorcom na výpočet priamej FT:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Zo vzťahov je zrejmé, že

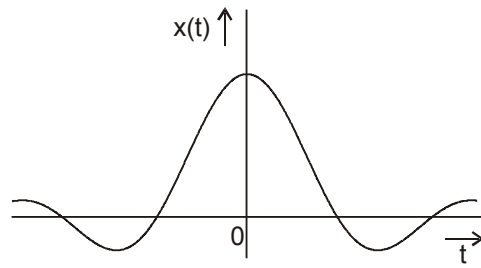
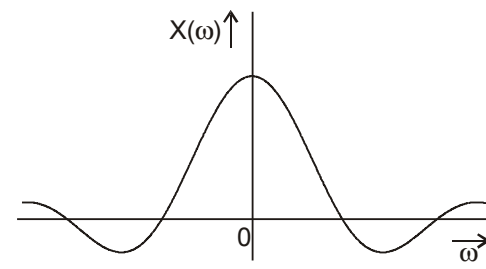
- ak časovej funkcii $x(t)$ odpovedá spektrálna funkcia $X(\omega)$, potom
- časovej funkcii $X(t)$ ($X(t)$ je časová funkcia tvarovo zhodná so spektrálnou funkciou $X(\omega)$) odpovedá spektrálna funkcia $x(-\omega)$, ktorá je tvarovo zhodná s časovou funkciou $x(-t)$.

Názov	Časová oblasť	Frekvenčná oblasť	Poznámka
Dualita	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$	



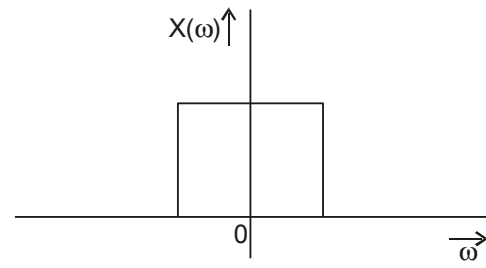
$$x(t) \rightarrow X(\omega)$$

a)



$$X(\omega) \rightarrow x(t)$$

b)



Základné vlastnosti - Veta o časovom posunutí (oneskorení) signálu

V komunikačných systémoch veľmi často dochádza k oneskoreniu signálu. Je preto dôležité poznať aký vplyv má oneskorenie v časovej oblasti na spektrálnu funkciu.

Ak signál $x(t - \vartheta)$ je voči signálu $x(t)$ posunutý (oneskorený) o hodnotu ϑ , potom pre jeho spektrálnu funkciu $X_{\vartheta}(\omega)$ platí

$$X_{\vartheta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \vartheta) e^{-j\omega t} dt \quad (3.114)$$

Ak použijeme substitúciu $t - \vartheta = \tau$ potom platí

$$t = \vartheta + \tau$$

$$dt = d\tau$$

Po dosadení do (3.114) dostaneme

$$\begin{aligned} X_{\vartheta}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega(\vartheta + \tau)} d\tau = e^{-j\omega\vartheta} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= e^{-j\omega\vartheta} X(\omega) = |X(\omega)| e^{j[\varphi(\omega) - \omega\vartheta]} = |X(\omega)| e^{j\varphi_{\vartheta}(\omega)} \end{aligned} \quad (3.115)$$

Zo vzťahu (3.115) vyplýva, že modul spektrálnej funkcie signálu oneskoreného o čas ϑ je totožný s modulom spektrálnej funkcie neposunutého signálu, teda

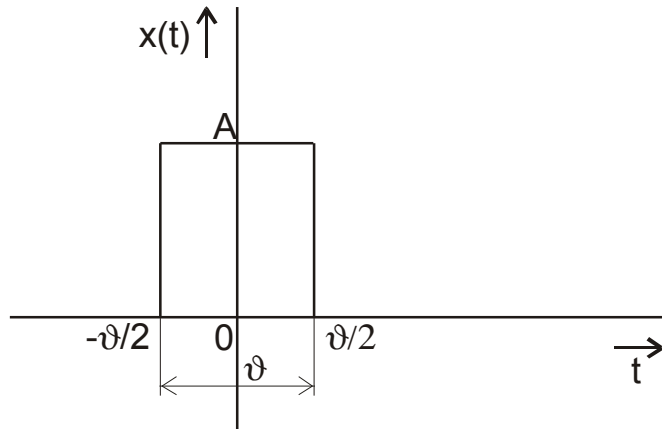
$$|X_{\vartheta}(\omega)| = |X(\omega)| \quad (3.116)$$

Fázové spektrum oneskoreného signálu je dané superpozíciou fázového spektra neposunutého signálu a hodnoty $-\omega\vartheta$, teda

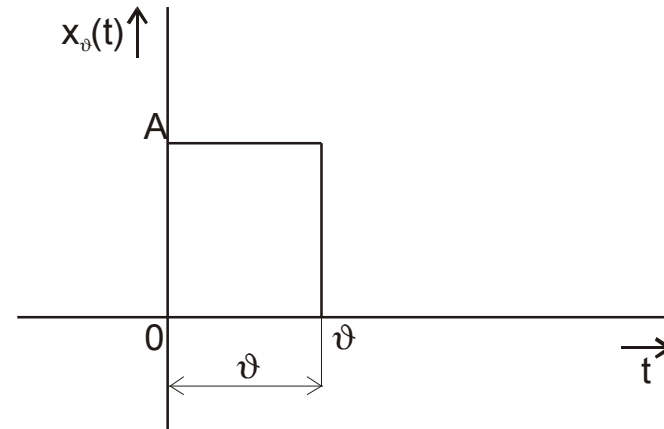
$$\varphi_{\vartheta}(\omega) = \varphi(\omega) - \omega\vartheta \quad (3.117)$$

Príklad 3.2.1

Je uvedená funkcia $x(t)$ (jednorázový impulz o šírke ϑ a amplitúde A) a funkcia $x_{\vartheta}(t) = x\left(t - \frac{\vartheta}{2}\right)$, pre ktorú platí



$$x(t) = \begin{cases} A & \text{pre } t \in \left(-\frac{\vartheta}{2}; \frac{\vartheta}{2}\right) \\ 0 & \text{pre ostatné } t \end{cases}$$



$$x_{\vartheta}(t) = \begin{cases} A & \text{pre } t \in (0; \vartheta) \\ 0 & \text{pre ostatné } t \end{cases}$$

Pre uvedené funkcie máme nájsť odpovedajúce spektrálne funkcie

Riešenie:

Pre spektrálnu funkciu $X(\omega)$ signálu $x(t)$ platí

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\frac{\vartheta}{2}}^{\frac{\vartheta}{2}} e^{-j\omega t} dt = A \vartheta \text{si}(\pi f \vartheta)$$

Na základe vety o časovom posunutí signálu

$$X_{\vartheta}(\omega) = X(\omega) e^{-j\omega \frac{\vartheta}{2}}$$

